



Ex libris ❧ ❧

❧ ❧ Doctoris ❧ ❧

Bonaventurae ❧ ❧

❧ Reyes Prósper.



c
e
r
a
c
e
r
P
à
t
q

(1

ASSOCIATION FRANÇAISE

POUR

L'AVANCEMENT DES SCIENCES

Fusionnée avec

L'ASSOCIATION SCIENTIFIQUE DE FRANCE

(Fondée par Le Verrier en 1864)

Reconnues d'utilité publique

HOMMAGE DE L'AUTEUR
Rue Littré, 5, PARIS

CONGRÈS DE CARTHAGE

1896

M. É. LEMOINE

QUESTIONS RELATIVES A LA GÉOMÉTRIE DU TRIANGLE,
A LA GÉOMÉTROGRAPHIE ET A LA TRANSFORMATION CONTINUE



PARIS

AU SECRÉTARIAT DE L'ASSOCIATION

28, RUE SERPENTE



que, par conséquent, toute la difficulté consiste à construire un tableau des signes obéissant à cette loi (*).

Cette difficulté n'est pas bien grande, comme on va s'en convaincre.

Euler nous dit qu'il est permis de changer les signes d'une ou de plusieurs lettres. Au moyen de cette faculté, nous pouvons, dans un tableau complet, comprenant les grandes, les petites lettres et les signes, arriver à n'avoir que des signes $+$, tant dans la première ligne que dans la première colonne.

En effet, quelle que soit la disposition des signes, on peut, par des changements de signes des grandes lettres, arriver à n'avoir que des signes $+$ dans la première colonne; ce résultat obtenu, au moyen de changements de signes des petites lettres, on amène la première ligne à n'avoir que des signes $+$.

Sans entrer dans aucun détail à ce sujet, nous dirons qu'il n'y a aucun inconvénient, alors, à faire abstraction du tableau des petites lettres et à ne considérer que le bloc des grandes lettres et des signes, ce qui simplifie singulièrement la question.

Si nous observons le carré d'Euler, nous voyons de suite que son procédé de construction est d'une extension indéfinie, quant aux lettres, quelle que soit l'arête 2^a .

En effet, prenons deux lettres, A et B, plaçons-les dans une première ligne dans l'ordre AB et dans une seconde dans l'ordre inverse BA, nous obtenons le carré

A	B
B	A

FIG. 6.

(*) Si l'on prend le bloc des grandes, des petites lettres et des signes, et si l'on élève au carré chaque ligne, on trouve dans le produit des monomes ayant la forme d'un carré, tels que a^2A^2 , b^2B^2 , c^2C^2 , d^2D^2 , etc., et d'autres celle d'un produit de lettres différentes, $aAbB$, $aAcC$, $aAdD$, etc.

En observant la totalité de ces derniers produits, on voit que chacun de ceux qui diffèrent au moins par une lettre est répété deux fois et pas davantage; si donc on parvient à donner un signe différent aux deux produits de même composition, leur somme s'annulera, et dans le résultat final il ne restera plus que les monomes ayant la forme de carrés dont la somme, convenablement disposée, prend la forme donnée par Euler au premier membre de son équation, c'est-à-dire un produit de deux polynomes composés chacun de quatre carrés.

Or, ces produits, identiques quant aux lettres, résultent de la multiplication des deux termes formant les côtés horizontaux de nos quadrilles. Ainsi, dans le quadrille (fig. 5) les produits sont $aAbB$ et $aBbA$, dont les facteurs sont intervertis. Si donc, dans le tableau des signes $\begin{smallmatrix} ++ \\ +- \end{smallmatrix}$ il y a trois identiques et un différent, la somme $+ aAbB - aBbA$ sera égale à zéro (l'intervention des facteurs ne changeant pas ici la valeur du produit).

La question de possibilité et d'impossibilité du problème primitif est donc ramenée à celle de la constitution d'un carré magique dans lequel tous les quadrilles, sans exception, aient trois signes identiques et un différent.

Au point de vue métaphysique, c'est-à-dire abstraction faite du concret, les deux questions sont absolument identiques et toute solution de l'une entraîne, par suite de cette identité, la solution de l'autre.

Ceci fait partie d'une théorie métaphysique très intéressante, celle de l'Analogie; toutes les sciences en général, et les mathématiques en particulier, en font de nombreuses applications, dont les plus banales sont les logarithmes, les déterminants, les formules symboliques, la géométrie de position, etc., etc.

$+ a A$	$+ b B$
$+ a B$	$- b A$

FIG. 5.

Faisons-en autant pour deux lettres C et D, et nous avons :

C	D
D	C

FIG. 7.

représentons le premier carré par A_1 , le second par B_1 et nous avons

A_1	B_1
B_1	A_1

FIG. 8.

le même procédé nous donne

A_2	B_2
B_2	A_2

FIG. 9.

et ainsi de suite jusqu'à

A_n	B_n
B_n	A_n

FIG. 10.

Quant au tableau des petites lettres, l'extension est si évidente qu'il n'est pas besoin d'en parler; il n'y a qu'à répéter identiquement la première ligne, de manière que les lettres identiques soient dans une même colonne.

Il ne nous reste plus qu'à nous occuper du tableau des signes.

En vertu même de la constitution du tableau des grandes lettres, si la première ligne et la première colonne sont exclusivement composées de signes +, la diagonale, à l'exception de la première case, ne contient que des signes —.

+	+	+	+
A	B	C	D
+	—	•	•
B	A	•	•
+	•	—	•
C	•	A	•
+	•	•	—
D	•	•	A

FIG. 11.

Ce résultat constaté, on voit que dans le carré intérieur au *cadre* (en appelant ainsi l'ensemble de la première ligne et de la première colonne)

toutes les lettres symétriques par rapport à la diagonale \ seront forcément de signe différent, par suite de la loi des quadrilles.

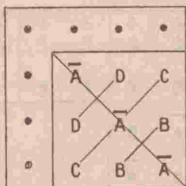


FIG. 42.

Il est à remarquer que, dans un quadrille isolé quelconque, on peut placer à volonté tel signe qui plaira dans trois cases prises au hasard ; ceci fait, le signe de la quatrième case est déterminé.

Si l'on procède par ordre à la construction du tableau des signes et en observant cette règle, on n'éprouve absolument aucune difficulté tant que l'arête du carré ne dépasse pas huit cases. Il n'y a qu'à se rendre compte des cases qui appartiennent à un quadrille, dont trois cases sont garnies d'un signe déterminé, et à les munir du signe voulu ; toute case qui n'est pas dans ce cas pouvant recevoir un signe facultatif.

Dans une exposition quelconque, on peut, en procédant d'une façon purement abstraite et surtout en employant la méthode symbolique, en arriver à une concision et une correction extrêmes ; mais on s'aperçoit bientôt que la lecture de ces œuvres parfaites est si pénible et demande une telle tension d'esprit que, si l'on n'est pas rompu par une longue pratique à ce genre d'étude, il est la plupart du temps plus commode d'inventer soi-même que de chercher à comprendre ce qui y est implicitement compris.

En outre, dans l'état actuel des cerveaux humains, les *visuels* sont en majorité énorme, de sorte que si un auteur n'éclaire pas son exposé par des exemples concrets, le lecteur se trouve dans la position des animaux assistant à la représentation du singe de Florian.

Pour éviter cet écueil, nous allons procéder par la méthode graphique sur un carré de huit pris comme exemple.

Si, après avoir mis le signe + dans chacune des cases de la première ligne et de la première colonne, on passe aux lignes et colonnes suivantes, en isolant par des traits les quadrilles les plus ramassés, nous avons une colonne, une ligne et une diagonale de *carrés mineurs*.

Si, dans tous les carrés de la première colonne, nous plaçons le signe +, dans la case à droite, en haut : $\begin{smallmatrix} + \\ + \end{smallmatrix}$, les signes de toutes les lettres com-

prises dans le tableau ci-dessus sont déterminés comme quatrièmes de quadrille.

Ceux de toutes les autres cases sont indéterminés ou facultatifs; mais,

$\begin{smallmatrix} + & + \\ A & B \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} + & + \\ C & D \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} + & + \\ E & F \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} + & + \\ G & H \end{smallmatrix}$
$\begin{smallmatrix} + & - \\ B & A \end{smallmatrix}$	D C	F E	H G
$\begin{smallmatrix} + & + \\ C & D \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} - & + \\ A & B \end{smallmatrix}$		
$\begin{smallmatrix} + & + \\ D & C \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} B & - \\ & A \end{smallmatrix}$		
$\begin{smallmatrix} + & + \\ E & F \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} + & + \\ H & \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} - & + \\ A & B \end{smallmatrix}$	
$\begin{smallmatrix} + & + \\ F & E \end{smallmatrix}$		$\begin{smallmatrix} B & - \\ & A \end{smallmatrix}$	
$\begin{smallmatrix} + & + \\ G & H \end{smallmatrix}$			$\begin{smallmatrix} - & + \\ A & B \end{smallmatrix}$
$\begin{smallmatrix} + & + \\ H & G \end{smallmatrix}$			$\begin{smallmatrix} B & - \\ & A \end{smallmatrix}$

FIG. 13.

si l'on place un signe quelconque dans n'importe quelle case, le signe de toutes les autres (ici au nombre de vingt-quatre) s'ensuit.

Pour la régularité, donnons le signe $\begin{smallmatrix} + \\ H \end{smallmatrix}$ à la case $\begin{smallmatrix} + \\ H \end{smallmatrix}$ et procédons par quadrilles successifs, nous obtenons le tableau des signes de la formule de Lebesgue.

$\begin{smallmatrix} + & + & + & + \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} + & + & + & + \end{smallmatrix}$
$\begin{smallmatrix} + & - & - & + \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} - & + & - & + \end{smallmatrix}$
$\begin{smallmatrix} + & + & - & - \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} + & - & - & + \end{smallmatrix}$
$\begin{smallmatrix} + & - & + & - \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} - & - & + & + \end{smallmatrix}$
$\begin{smallmatrix} + & + & - & + \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} - & - & + & - \end{smallmatrix}$
$\begin{smallmatrix} + & - & + & + \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} + & - & - & - \end{smallmatrix}$
$\begin{smallmatrix} + & + & + & - \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} - & + & - & - \end{smallmatrix}$
$\begin{smallmatrix} + & - & - & - \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} + & + & + & - \end{smallmatrix}$

FIG. 14.

Si on l'applique sur le tableau des grandes lettres, on vérifie que *tous les quadrilles obéissent à la loi*.

Il n'existe aucune contradiction nulle part; donc le problème est possible et même facile à résoudre jusqu'à 2^3 .

L'auteur d'une communication, quand le sujet est un peu complexe, se trouve dans la position peu commode des victimes de Procuste; il est tenu, avant tout, à la concision, dût-il être obscur; il ne lui reste d'autre ressource que celle de Fermat devant l'exiguïté de la marge, c'est-à-dire

de donner des affirmations sans démonstration, laissant au lecteur le soin de les vérifier. Ainsi ferai-je pour ne pas laisser de côté les considérations psychologiques et métaphysiques, que je regarde comme bien autrement importantes que le sujet lui-même.

Le nombre des cases facultatives est, dans un carré de huit, de $8 + 7 + 3 + 1$, et, en général, si l'on désigne l'arête par a , de :

$$a + \left(\frac{a}{1} - 1\right) + \left(\frac{a}{2} - 1\right) + \left(\frac{a}{4} - 1\right) + \dots - \left(\frac{a}{a} - 1\right),$$

ou, si l'on fait $a = 2^n$, de $3 \times 2^n - (n + 2)$.

Quant aux variations de position dont est susceptible un tableau de signes, elles sont une conséquence de ce que nous venons de dire, et le lecteur peut s'amuser à résoudre une foule de petites questions, telles que le nombre des variations dans un carré d'arête désignée, l'obligation de donner un signe déterminé à certaines cases, la possibilité ou l'impossibilité de certaines demandes, etc., etc., ce dernier problème tenant à une théorie assez curieuse (celle de l'*Intrication*), mais qui demanderait de trop longs développements pour être ici même effleurée d'une façon succincte.

+	A	+	B	+	C	+	D	+	E	+	F	+	G	+	H	+	I	+	J	+	K	+	L	+	M	+	N	+	O	+	P
+	B	-	A	-	D	+	C	-	F	+	E	-	H	+	G	-	J	+	I	-	L	+	K	-	N	+	M	-	P	+	O
+	C	+	D	-	A	-	B	-	G	+	H	+	E	-	F	-	K	+	L	+	I	-	J	-	O	+	P	+	M	-	N
+	D	-	C	+	B	-	A	+	H	+	G	-	F	-	E	+	L	+	K	-	J	-	I	+	P	+	O	-	N	-	M
+	E	+	F	+	G	-	H	-	A	-	B	-	C	+	D	M	N	O	P	I	J	K	L								
+	F	-	E	-	H	-	G	+	B	-	A	+	D	+	C	N	M	P	O	J	I	L	K								
+	G	+	H	-	E	+	F	+	C	-	D	-	A	-	B	O	P	M	N	K	L	I	J								
+	H	-	G	+	F	+	E	-	D	-	C	+	B	-	A	P	O	N	M	L	K	J	I								
+	I	+	J	+	K	-	L	M	N	O	P	-	A	-	B	-	C	+	D	E	F	G	H								
+	J	-	I	-	L	-	K	N	M	P	O	+	B	-	A	+	D	+	C	F	E	H	G								
+	K	+	L	-	I	+	J	O	P	M	N	+	C	-	D	-	A	-	B	G	H	E	F								
+	L	-	K	+	J	+	I	P	O	N	M	-	D	-	C	+	B	-	A	H	G	F	E								
+	M	+	N	+	O	-	P	I	J	K	L	E	F	G	H	-	A	-	B	-	C	+	D								
+	N	-	M	-	P	-	O	J	I	L	K	F	E	H	G	+	B	-	A	+	D	+	C								
+	O	+	P	-	M	+	N	K	L	I	J	G	H	E	F	+	C	-	D	-	A	-	B								
+	P	-	O	+	N	+	M	L	K	J	I	H	G	F	E	-	D	-	C	+	B	-	A								

FIG. 45.

Arrivons maintenant à la question capitale, au carré de seize, et mon-

trons non seulement qu'il est impossible, mais donnons en même temps la raison de cette impossibilité. Pour être concis et clair pour tout le monde, procédons par la méthode graphique.

Si nous prenons un carré de grandes lettres de seize cases et que nous procédions par les méthodes précédemment indiquées, nous pouvons garnir de signes les dix carrés mineurs de quatre cases de côté, composant le cadre et la diagonale. Dans cette opération, aucune désobéissance à la loi ne se produit; mais, quand il s'agit de continuer l'opération pour le reste du tableau, il n'en est plus ainsi. Pour donner de la clarté et de la concision à notre exposition, substituons au tableau complet un schéma construit avec les mineurs de quatre cases de côté; représentons les carrés
 ABCD, EFGH, IJKL, MNOP
 par A_4 B_4 C_4 D_4
 et nous avons :

11 A_4	12 B_4	13 C_4	14 D_4
21 B_4	22 A_4	23 D_4	24 C_4
31 C_4	32 D_4	33 A_4	34 B_4
41 D_4	42 C_4	43 B_4	44 A_4

FIG. 16.

Numérotions les cases en employant la méthode des coordonnées, plaçant les x à gauche, les y à droite.

En jetant les yeux sur un quadrille obéissant à la loi, on voit de suite que si l'on prend à volonté deux cases garnies de signes identiques, les deux autres sont munies de signes différents, et *vice versa*.

Il est en outre évident que si, dans un tableau général d'un certain nombre de cases, deux carrés mineurs sont munis de signes identiques case à case, les mineurs quadrillants auront case à case des signes différents.

De plus, comme toutes les cases symétriques à la diagonale sont affectées forcément de signes différents quand le cadre ne contient que des signes identiques, il en résulte que deux mineurs symétriques par rapport à la diagonale sont inverses case à case après le renversement de l'un d'eux autour de sa diagonale.

(Pour rendre le raisonnement plus bref, quand nous dirons que deux carrés sont différents ou identiques, il sera convenu qu'il s'agira seulement des signes.)

Ceci établi, 12 et 14 étant, par le fait de notre construction, identiques case à case, 32 et 34 sont différents case à case.

De même, 12 et 13 étant identiques case à case, 42 et 43 sont différents case à case.

Mais 34 et 43 étant symétriques par rapport à la diagonale sont différents case à case après le renversement de l'un d'eux autour de sa diagonale; il suit de là que 32 et 42 sont différents case à case après renversement.

Or, comme 31 et 41 sont identiques case à case, 32 et 42 sont différents case à case; de tout cela il résulte, enfin, que 32 et 42 sont à la fois différents case à case et différents après renversement de l'un d'eux autour de sa diagonale, ce qui, sans plus amples explications, implique que les cases symétriques par rapport à la diagonale, tant dans l'un que dans l'autre, sont identiques.

Pour plus de clarté, prenons le carré 32 et voyons ce qui s'y passe.

Si les N ont des signes identiques et s'il en est de même des O et des P, les signes de M_2 , M_3 , M_4 sont identiques entre eux et différents de M_1 .

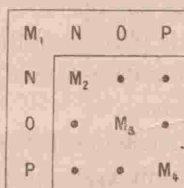


FIG. 17.

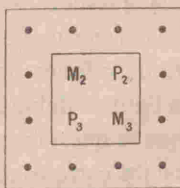


FIG. 18.

Par conséquent, dans le carré central, les signes de M_2 et M_3 sont forcément identiques; ceux de P_2 et P_3 également; par suite, il est absolument impossible que le quadrille obéisse à la loi qui tient sous sa domination la possibilité ou l'impossibilité du problème.

Il est donc clairement établi que le problème est forcément impossible pour $16 = 2^4$.

Mais, comme ce que nous venons d'exposer ne limite en rien l'étendue du carré central, les mêmes raisons s'appliqueraient à tous les carrés centraux d'arête supérieure à 2, et l'impossibilité ne fera que s'accroître à mesure que l'arête augmentera.

Les démonstrations d'impossibilité de certains problèmes présentent souvent de telles difficultés que j'ose espérer que le lecteur voudra bien être indulgent si mon exposition a laissé à désirer; n'ayant jamais professé et ne m'intéressant qu'à la question de découverte, je me suis pour ainsi dire estropié le cerveau à certains points de vue; privé du concours

si gracieux de mon collaborateur et ami, M. Laisant, trop occupé par des sujets plus sérieux que celui-ci, j'ai dû montrer mon infériorité dans un ordre d'idées qui demande une longue pratique. Qu'on veuille bien me le pardonner ; un pauvre vieillard infirme ne peut donner que ce qu'il a.

Maintenant, terminons par quelques réflexions philosophiques cette trop longue mais nécessaire exposition.

Il est maintenant facile de se rendre compte de la raison de l'impossibilité ; tant que les carrés mineurs ont moins de quatre cases d'arête, il n'y a pas de carré central ; et comme c'est sur ce carré que l'impossibilité se manifeste, rien ne s'oppose à la solution du problème.

Une question quelconque est un complexe d'opérateurs, les uns en très petit nombre à l'état actif, les autres en nombre illimité à l'état modulaire ; tant qu'on reste dans des limites restreintes, la plupart des opérateurs ne peuvent manifester leur présence, qui ne se décèle que lorsque, les faits prenant de l'extension, on s'élève à des considérations d'ordre supérieur. (Exemple : les imaginaires.)

Quand un logicien, se basant sur un fait particulier, croit avoir le droit de conclure à un fait général, quand il fait, suivant l'expression consacrée, de la *logique inductive*, il est victime d'une illusion ; il ignore absolument si, dans la question qui l'occupe, il n'existe pas des opérateurs ou paramètres (ce dernier mot étant pris dans son sens le plus général) qui, à l'état modulaire ou affectés de coefficients évanescents dans le cas observé, y sont dans l'impossibilité de manifester leur présence.

Tant que la question ne sort pas de certains territoires bien limités, la conclusion est correcte et la proposition qui s'ensuit vraie ; mais, dès que le logicien croit, en vertu de l'Anomal, avoir le droit de passer au non Anomal, il commet une faute lourde.

On ne peut conclure du particulier au général qu'autant que dans l'induction qui en résulte aucun opérateur ne passe de l'état modulaire à l'état actif. C'est dans ce cas seulement que l'on a le droit de généraliser, toute extension qui ne se conforme pas à cette règle est fautive et illégitime.

Voilà pourquoi Genochi et Samuel Roberts ont pris, dans la question que nous venons d'exposer, des conclusions diamétralement opposées, tout en raisonnant conformément aux règles de la logique, soit d'Aristote, soit de Bacon.

Nous finirons donc en concluant, à notre tour, que ces logiques auraient grand besoin de passer sous la férule de l'analyse métaphysique ; nous ferons même remarquer (chose en opposition avec les dogmes en vénération à l'époque actuelle) que, dans ce qu'on est convenu d'appeler la *théorie des nombres*, la considération de nombre ne joue presque jamais aucun rôle, et que c'est en vertu de considérations entièrement étrangères

à celle-là qu'on procède aux raisonnements et que l'on tire des conclusions ; à plus forte raison en est-il de même dans les autres branches de la science des mathématiques, science qui, envisagée à son vrai point de vue, devrait être *la théorie de l'abstrait absolu* et non celle des nombres, application spéciale fort commode quelquefois, mais qui, la plupart du temps, fausse les idées (*).

(*) Lucas, dans sa *Théorie des nombres*, a voulu montrer que cette question pouvait être considérée comme une conséquence des carrés magico-magiques de Fermat ; cette idée est juste, mais elle n'est pas heureuse, car la constitution fondamentale de la question ne ressort pas comme dans le carré d'Euler, chose capitale pour un métaphysicien. Il est vrai, toutefois, que l'on passe aisément d'une forme à l'autre, car, si, dans la formule de Lucas donnée ci-dessus, on intervertit d'abord d'une façon convenable les termes de chaque ligne, on a :

$$\begin{array}{r} -ap + br + cs + dq \\ +as - bq + cp + dr \\ +aq + bs - cr + dp \\ +ar + bp + cq - ds \end{array}$$

L'intervention des lignes donne

$$\begin{array}{r} -ap + br + cs + dq \\ +ar + bp + cq - ds \\ +as - bq + cp + dr \\ +aq + bs - cr + dp \end{array}$$

En changeant le signe de la lettre *p*, on obtient :

$$\begin{array}{r} +ap + br + cs + dq \\ +ar - bp + cq - ds \\ +as - bq - cp + dr \\ +aq + bs - cr - dp \end{array}$$

qui, décomposée, donne

<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>
<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>
<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>
<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>

FIG. 19.

<i>p</i>	<i>r</i>	<i>s</i>	<i>q</i>
<i>r</i>	<i>p</i>	<i>q</i>	<i>s</i>
<i>s</i>	<i>q</i>	<i>p</i>	<i>r</i>
<i>q</i>	<i>s</i>	<i>r</i>	<i>p</i>

FIG. 20.

+	+	+	+
+	-	+	-
+	-	-	+
+	+	-	-

FIG. 21.

c'est-à-dire la formule d'Euler.

Ceci montre, par un exemple, que la direction que l'on adopte dans une étude n'est pas indifférente, et que les diverses voies dans lesquelles on s'engage sont bien loin d'avoir toutes la même portée.

L'histoire des mathématiques est pleine des tristes conséquences de ces faux aiguillages, et c'est toujours l'absence d'analyse métaphysique qui en est cause.

M. É. LEMOINE

Ancien Élève de l'École Polytechnique, à Paris.

QUESTIONS RELATIVES A LA GÉOMÉTRIE DU TRIANGLE, A LA GÉOMÉTROGRAPHIE
ET A LA TRANSFORMATION CONTINUE (*)

[K 21 a 8]

— Séance du 3 avril 1896 —

SUR LE POINT $\Phi : \frac{a^2b^2 + a^2c^2 - b^2c^2}{a}$, ETC., ET SUR LE POINT $W : \frac{a^4 - b^2c^2}{a}$, ETC.

A. — Nous allons résumer les principales propriétés de ces points qui se retrouvent si fréquemment dans la géométrie du triangle, en en ajoutant quelques-unes à celles que nous citons. Je me sers, dans ce mémoire, à moins d'avertissement contraire, des coordonnées normales par rapport au triangle de référence ABC.

1. — Si par Φ on mène des parallèles aux trois côtés BC, CA, AB et que l'on apèle l , m , n les longueurs de ces parallèles comprises entre AB et AC, BC et BA, CA et CB, que l'on mène des parallèles analogues par un point M quelconque, Φ est le point du plan pour lequel la somme des carrés de ces parallèles est minima. La valeur de $l^2 + m^2 + n^2$ est alors :

$$\frac{4a^2b^2c^2}{\Sigma b^2c^2}.$$

2. — On a : $al = bm = cn = \frac{2a^2b^2c^2}{\Sigma b^2c^2}$. (Voir *Journ. d'élém. de M. de Longchamps*, 1883, p. 242.)

3. — Φ est au point de concours des trois droites qui joignent le pied d'une simédiane partant d'un sommet, au symétrique de ce sommet par rapport au milieu du côté opposé.

Celle qui part de C a pour équation :

$$-ab^2x + a^2by + cz(a^2 - b^2) = 0. \quad (\text{Grenoble, 1885.})$$

(*) L'orthographe de la Société philologique française est employée dans ce mémoire et dans le suivant.

4. — Si $A\Phi$, $B\Phi$, $C\Phi$ coupent BC , CA , AB en trois points A' , B' , C' les parallèles menées aus côtés par ces points, coupent les côtés en six points concicliques ; Φ est le seul point qui jouisse de cète propriété ; l'équation du cercle passant par ces six points est :

$$\Sigma a^2 x^2 [b^4 c^4 - a^4 (b^4 - c^4)] - 2 \Sigma b^3 c^3 y z [a^2 b^2 + a^2 c^2 - b^2 c^2 - 2a^4] = 0$$

(Grenoble, 1885.)

5. — Le point Φ , le point Z milieu de la distance des points de Brocard, le point $D : \frac{1}{a^3}$, etc., le baricentre, sont quatre points sur la droite :

$$\Sigma a^3 x (b^2 - c^2) = 0.$$

Le point Z est au milieu de ΦD .

6. — Le point Φ , le point $W : \frac{a^4 - b^2 c^2}{a}$, etc., et le centre du cercle circonscrit sont en ligne droite.

7. — Le point Φ , le point de Steiner et le point $D' : a^3, b^3, c^3$ sont colinéaires.

8. — Φ est le centre radical des trois cercles de Neuberg M_a, M_b, M_c . Je rapèle que que M_a est le lieu des points A' du plan du triangle ABC , tels que le triangle $A'BC$ ait le même angle de Brocard que ABC . (Gob, *Suplément de Mathesis*, 1889.)

9. — Soient K le point de Lemoine de ABC , A', B', C' les projections de K sur les côtés ; je prends sur les hauteurs partant de A, B, C les longueurs AJ_a, BJ_b, CJ_c respectivement équipolentes à $2KA', 2KB', 2KC'$, les parallèles menés par J_a, J_b, J_c respectivement à BC, CA, AB se coupent en Φ .

10. — Φ appartient à l'hiperbole $\Sigma a^2 x^2 (b^2 - c^2) = 0$ qui passe par les centres des cercles tangents aus trois côtés et par le baricentre ; cète courbe a pour centre le point de Steiner. (Grenoble, 1885.)

11. — La tangente à cète hiperbole au centre de gravité passe par le point de Lemoine ; la tangente au centre o du cercle inscrit passe au point : $\frac{1}{a^2}$, etc., la tangente au centre du cercle ex-inscrit o_a passe au point : $-\frac{1}{a^2}, \frac{1}{b^2}, \frac{1}{c^2}$.

12. — W est le point du plan dont les brocardiens (par rapport à la droite de l'infini) sont sur le cercle circonscrit. (N. A. 1885.)

13. — W est le point d'intersection de la brocardienne directe et de la brocardienne rétrograde de la droite de Lemoine par rapport à la droite de l'infini. (Nancy, 1886.)

14. — Le point $D : \frac{1}{a^3}$, etc., le point $D' : a^3$, etc., et le point W sont en ligne droite.

$$\text{On a : } \frac{WD'}{WD} = \frac{\Sigma b^2 c^2}{\Sigma a^4}. \quad (\text{Marseille, 1891, p. 30.})$$

15. — W, le baricentre G et le point de Lemoine K sont en ligne droite; en posant come à l'ordinaire $n^4 = \Sigma b^2 c^2$, $m^2 = \Sigma a^2$, on a :

$$WK^2 = \frac{n^8}{m^4} \cdot \frac{4m^2 n^4 - 27a^2 b^2 c^2}{(m^4 - 3n^2)^2},$$

$$\text{et : } \frac{WG}{WK} = \frac{1}{3} \cdot \frac{m^4}{n^4}.$$

16. — Si ω et ω_1 sont les points de Brocard, que $A\omega$, $B\omega$, $C\omega$ coupent BC, CA, AB en A' , B' , C' et que $A\omega_1$, $B\omega_1$, $C\omega_1$ coupent BC, CA, AB en A'_1 , B'_1 , C'_1 ; si l'on apèle α l'intersection de $B'C'$ et de $B'_1 C'_1$, β cèle de CA' et de $C'_1 A'_1$, γ cèle de $A'B'$ et de $A'_1 B'_1$, les trois droites $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ se coupent en W.

SEGMENTS SUR LES PARALÈLES ET LES ANTIPARALÈLES AUS COTÉS D'UN TRIANGLE

B. — Soit un triangle ABC. Apelons X_1 , Y_1 , Z_1 les segments interceptés entre les côtés AB et AC, etc., par les parallèles aus trois côtés menées par un point M; apelons X_2 , Y_2 , Z_2 les segments des antiparallèles à BC, etc. menées par un point M, interceptés entre AB et AC, etc.

On aura les théorèmes suivants :

1. — Pour tout point M appartenant à une droite parallèle à la droite $\Sigma a^2 x = 0$, on aura :

$$X_1 + Y_1 + Z_1 = \text{const.}$$

Cète constante est $2p$ pour la droite $\Sigma a^2 x = 0$.

La transformation continue en A montre que pour tout point M appartenant à une parallèle à la droite $-a^2x + b^2y + c^2z = 0$ on aura :

$$2(p - a) = -X_1 + Y_1 + Z_1.$$

2. — Pour tout point de la droite $\Sigma a(b + c)x = 0$ on aura :

$$X_1 + Y_1 + Z_1.$$

La transformation continue en A montre que pour tout point de la droite : $a(b + c)x + b(c - a)y + c(b - a)z = 0$ on a :

$$-X_1 + Y_1 + Z_1 = 0.$$

3. — Pour tout point de la droite de Lemoine $\Sigma \frac{x}{a} = 0$, on a :

$$X_2 + Y_2 + Z_2 = 0$$

et pour tout point d'une parallèle à la droite de Lemoine on a :

$$X_2 + Y_2 + Z_2 = \text{const.}$$

4. — Pour toute parallèle à la droite $\Sigma(2bc - a^2)x = 0$, $X_1 + X_2 + Y_1 + Y_2 + Z_1 + Z_2$ est constant.

La constante est nulle pour celle de ces parallèles qui a pour équation :

$$\Sigma(2bc + ca + ab)x = 0.$$

5. — La droite de Lemoine, la droite $\Sigma a(b + c)x = 0$ et la droite $\Sigma(2bc + ca + ab)x = 0$ se coupent sur l'axe antiortique $x + y + z = 0$ au point $a(b - c)$, etc.

6. — Pour le point $-\frac{1}{a(b + c)} + \frac{1}{b(c + a)} + \frac{1}{c(a + b)}$, etc., ou $-b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2 + 2pabc$, etc., on a :

$$X_1 + X_2 = Y_1 + Y_2 = Z_1 + Z_2 = \frac{1}{\Sigma \frac{p - a}{a(b + c)}} = \frac{abc(b + c)(c + a)(a + b)}{p(p^2 + r^2) - abc(3p^2 + r^2)}.$$

7. — On trouve que $X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2$ est minimum pour le point $a(3a^2 - b^2 - c^2)$, etc., ou $a(a^2 - bc \cos A)$, etc.

8. — Le lieu des points M, tels que l'on ait $Z_1^2 + Z_2^2 = \text{const} = K^2$ est l'ellipse (CB axe des x , CA axe des y) :

$$(by + ax)^2 + (ay + bx)^2 - \frac{a^2 b^2 K^2}{c^2} = 0.$$

La transformation continue en A, appliquée au n° 4, montre que pour toute parallèle à la droite :

$$(2bc - a^2)x + (2ca + b^2)y + (2ab + c^2)z = 0,$$

— $X_1 + X_2 + Y_1 + Y_2 + Z_2 + Z_1$ est constant et que cète constante est nule pour la droite :

$$(2bc - ca - ab)x + (2ca - cb + ab)y + (2ab - cb + ac)z = 0.$$

La transformation continue en A, appliquée au n° 5, montre que la droite de Lemoine, la droite $a(b + c)x - by(a - c) - cz(a - b) = 0$, la droite $(2bc - ca - ab)x + (2ca - cb + ab)y + (2ab - cb + ac)z = 0$ se coupent sur la droite — $x + y + z = 0$ qui joint les pieds, sur les côtés opposés, des bissectrices intérieures de B et de C, au point :

$$a(b - c), b(c + a), -c(a + b).$$

Par transformation continue en A, X_1, Y_1, Z_1 deviennent — X_1, Y_1, Z_1 ; X_2, Y_2, Z_2 ne se modifient point.

On déduit donc, en apliquant la transformation continue en A au n° 6, que pour le point :

$$-\frac{1}{a(b+c)} + \frac{1}{b(a-c)} + \frac{1}{c(a-b)}, -\frac{1}{a(b+c)} + \frac{1}{b(a-c)} - \frac{1}{c(a-b)},$$

$$-\frac{1}{a(b+c)} - \frac{1}{b(a-c)} + \frac{1}{c(a-b)},$$

on a :

$$-X_1 + X_2 = Y_1 + Y_2 = Z_1 + Z_2$$

$$= \frac{abc(b+c)(a-c)(a-b)}{(p-a)[(p-a)^2 - r_a^2 \delta_a^2] + abc[3(p-a)^2 - r_a^2 \delta_a^2]}.$$

SUR DEUX CONIQUES HOMOFOCALES, L'UNE INSCRITE, L'AUTRE CIRCONSCRITE

C. — J'ai signalé en 1883 au Congrès de Rouen les deux coniques :

$$\Sigma \frac{1}{x} = 0, \quad (1)$$

$\Sigma \sqrt{ax_a} = 0$, que l'on peut encore écrire :

$$\Sigma \sqrt{\frac{ax}{p-a}} = 0, \quad (2)$$

qui sont homofocales, ont pour centre le point $p - a$, etc.

Je veux donner encore quelques propriétés de ces courbes.

Les carrés des demi-axes de (1) sont, en appelant d la distance Oo , des centres des cercles inscrit et circonscrit :

$$\frac{2S^2R}{d^3} \left(\frac{R+r}{d} + 1 \right) \left(\frac{R+r}{d} - 1 \right) \quad \text{et} \quad \frac{2S^2R}{d^3} \left(\frac{R+r}{d} + 1 \right) \left(\frac{R+r}{d} - 1 \right)^2$$

ou :

$$\frac{2S^2Rr\delta(R+r+d)}{d^5} \quad \text{et} \quad \frac{2S^2Rr\delta(R+r-d)}{d^6}.$$

Le carré de la demi-distance focale est : $\frac{4S^2Rr\delta}{d^5}$.

Les carrés a'^2 , b'^2 des demi-axes de (2) se calculent alors linéairement par les formules :

$$a'^2 - b'^2 = \frac{4S^2Rr\delta}{d^5}, \quad (3)$$

$$a'^2 + b'^2 = \frac{2p^2}{\delta^2} (2R^2 - 2Rr - r^2). \quad (4)$$

Ces résultats doivent être très pénibles à trouver par les méthodes ordinaires. On y arrive assez facilement en se servant des formules de M. P. Serret, données dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1865, p. 208.

Il faut, de plus, pour avoir la formule (4), évaluer la quantité $\Sigma a(p-a)^2 \cos A$, que l'on trouve égale à $\frac{2S}{R} (2R^2 - 2Rr - r^2)$, au moyen des transformations symétriques dont j'ai donné de nombreux exemples.

L'ellipse (1) coupe le cercle circonscrit au point $\frac{1}{b-c}$, etc.

L'ellipse (2) touche les côtés aux points de contact des cercles ex-inscrits.

La transformation continue nous montre qu'il y a d'autres coniques que (1) et (2) homofocales et telles que l'une soit inscrite et l'autre circonscrite au triangle.

La transformation continue en A, par exemple, donne les résultats suivants :

$$\text{La conique :} \quad -\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0 \quad (1)'$$

$$\text{et la conique :} \quad \sqrt{-arx} + \sqrt{br_c y} + \sqrt{cr_b z} = 0 \quad (2)'$$

$$\text{ou :} \quad \sqrt{\frac{-ax}{p}} + \sqrt{\frac{by}{p-c}} + \sqrt{\frac{cz}{p-b}} = 0$$

sont homofocales, leur centre est le point :

$$p, p-c, p-b.$$

Si d_a est la distance Oo_a .

Les carrés des demi-axes de (1)' sont :

$$\frac{2S^2 R r_a \partial_a (-R + r_a + d_a)}{d_a^6}, \quad \frac{2S^2 R r_a \partial_a (-R + r_a - d_a)}{d_a^6}.$$

Les carrés des demi-axes de (2)' sont donnés linéairement par :

$$a_a'^2 - b_a'^2 = \frac{4SR r_a \partial_a}{d_a^5},$$

$$a_a'^2 + b_a'^2 = \frac{2(p-a)^2}{\partial_a^2} (2R^2 + 2Rr_a - r_a^2).$$

La conique (1)' coupe le cercle circonscrit au point :

$$\frac{1}{b-c}, \quad -\frac{1}{c+a}, \quad \frac{1}{a+b}.$$

La conique (2)' touche les trois côtés au point de contact du cercle

inscrit sur BC, au point de contact du cercle ex-inscrit o_c sur CA et au point de contact du cercle ex-inscrit o_b sur AB.

(Voir aussi notre mémoire du Congrès de Nancy, 1886, où nous nous occupons des coniques (1) et (2) et celui du Congrès de Toulouse, 1887, où nous étudions le point $p - a, p - b, p - c$.)

SUR UN GROUPE DE SIX POINTS

D. — Nous allons signaler, dans un triangle, un groupe de six points, défini d'une façon qui a une certaine analogie avec celle dont on définit les points de Brocard, par les angles que font les droites qui les joignent aux sommets, avec les côtés.

Apelons ω_a et ω'_a les points tels que l'on ait respectivement $\widehat{\omega_a AC} = \widehat{\omega_a CB} = \widehat{\omega_a BC}$ et $\widehat{\omega'_a AB} = \widehat{\omega'_a BC} = \widehat{\omega'_a CB}$ et désignons aussi, respectivement, par les mêmes lettres ω_a et ω'_a les angles $\widehat{\omega_a AC}$, etc., $\widehat{\omega'_a AB}$, etc.

On voit facilement que si ω et ω' sont les points direct $\frac{b}{c}, \frac{c}{a}, \frac{a}{b}$ et rétrograde $\frac{c}{b}, \frac{a}{c}, \frac{b}{a}$ de Brocard :

1° Les points ω_a et ω'_a appartiennent, respectivement, aux cercles $AC\omega_a$, $AB\omega'_a$ et par conséquent que $C\omega_a A = 180 - C$, $B\omega'_a A = 180 - B$;

2° Que l'on a $\sin 2\omega_a = \frac{\sin A \sin C}{\sin B}$, $\sin 2\omega'_a = \frac{\sin A \sin B}{\sin C}$;

3° Que ω_a, ω'_a sont sur la médiatrice de BC;

4° Que les six angles $\omega_a, \omega'_a, \omega_b, \omega'_b, \omega_c, \omega'_c$ sont tels que $\omega_a = \omega'_c$, $\omega_b = \omega'_a$, $\omega_c = \omega'_b$.

SUR LA DIVISION HARMONIQUE D'UNE TRANSVERSALE

E. — Soient un triangle ABC et une transversale qui coupe les côtés en A', B', C' . Si M_a est le conjugué harmonique de A' par rapport à B' et à C' et que l'équation de la transversale en coordonnées normales soit : $Ax + By + Cz = 0$, le point M_a aura pour coordonnées : $-\frac{2}{A}, \frac{1}{B}, \frac{1}{C}$.

Si la droite $A'B'C'$ passe par le point fixe $D_a (l_a, m_a, n_a)$, le lieu de M_a sera la conique circonscrite G_a , passant en D_a , dont l'équation est :

$$-2l_a yz + m_a zx + n_a xy = 0.$$

Si L_a est le point où l'axe orthique $\Sigma x \cos A = 0$ coupe la droite BC et si H est l'ortocentre, la droite HL_a est telle que, si D_a lui appartient, la conique est une hyperbole équilatère.

Cette conique est le cercle circonscrit, si D_a est à l'intersection de la simédiane partant de A avec le cercle circonscrit, on a alors ce théorème :

Si, dans un triangle ABC, la simédiane partant de A coupe le cercle circonscrit en D_a , toute transversale menée par D_a et coupant le cercle en D'_a sera telle que, A' , B' , C' étant les intersections de la transversale avec les côtés, D'_a et A' seront conjugués harmoniques par rapport à B' et à C' .

On aurait de même le théorème général suivant :

Soit D le point du plan du triangle ABC dont les coordonnées sont x, y, z , il y a sur AD un point D'_a : $-\frac{x}{2}, y, z$, tel que, si par ce point on mène une sécante coupant BC, CA, AB en A'_a, B'_a, C'_a et que M_a soit le conjugué harmonique de A'_a par rapport à B'_a et à C'_a , le lieu de M_a sera la conique :

$$\frac{x}{X} + \frac{y}{Y} + \frac{z}{Z} = 0.$$

De même il y a sur BD un point D_b : $x, -\frac{y}{2}, z$ tel que si par ce point on mène une sécante coupant BC, CA, AB en A'_b, B'_b, C'_b et que M_b soit le conjugué harmonique de B'_b par rapport à A'_b et à C'_b , le lieu M_b sera la même conique, ainsi que le lieu de M_c . En prenant pour D les points remarquables du triangle, on retrouvera les coniques remarquables pour lieux de M_a, M_b, M_c . Si D est le point de Lemoine, le lieu de M_a, M_b, M_c est le cercle circonscrit. C'est le cas particulier donné précédemment. Si D est le centre de gravité, le lieu est la conique circonscrite de Steiner, etc.

SUR DIVERSES CONSTRUCTIONS DE POINTS

F. — 1. — On sait (Congrès de Pau, 1892, p. 106) que les trois cercles :

$$\Sigma ayz + (M_1y + N_1z) \Sigma ax = 0,$$

$$\Sigma ayz + (N_2z + L_2x) \Sigma ax = 0,$$

$$\Sigma ayz + (L_3x + M_3y) \Sigma ax = 0,$$

qui représentent des cercles quelconques passant en A, B, C respectivement, ont pour centre radical le point R dont les coordonnées sont :

$$-M_3N_2 + N_2M_1 + M_3N_1, -N_1L_3 + L_3N_2 + N_1L_2, -L_2M_1 + M_1L_3 + L_2M_3.$$

Si on considère une droite $Ax + By + Cz = 0$, coupant les côtés BC,

CA, AB respectivement en A', B', C' et que les trois cercles soient AB'C', BC'A', CA'B', les coordonnées de R seront : $\frac{a}{A(bC - cB)}$, etc., et l'on sait que R appartient au cercle circonscrit à ABC.

Si la droite est l'axe antiortique, R sera le point $\frac{a}{b - c}$, etc.

Si la droite est $\Sigma a^2x = 0$, R sera le point $\frac{1}{b - c}$, etc.

Si la droite est la droite de de Lonchamps $\Sigma a^3x = 0$, R sera le point de Steiner.

Si la droite est la droite de Lemoine $\Sigma \frac{x}{a} = 0$, R sera le point $\frac{a}{b^2 - c^2}$, etc., et ces théorèmes donneront des constructions simples de ces points et de leurs transformés continus, quand ils en auront.

EXEMPLE : Placer le point $\frac{a}{b - c}$, etc.

Je l'obtiens par l'intersection du cercle circonscrit avec le cercle AB'C'.

Je trace le cercle circonscrit en prenant, pour mener les perpendiculaires aux côtés, des cercles d'un rayon φ *suffisamment grand*.

. op. : $(4R_1 + 2R_2 + 5C_1 + 4C_3)$.
je mène les bissectrices des angles extérieurs B et C en utilisant les cercles déjà tracés op. : $(4R_1 + 2R_2 + 4C_1 + 4C_3)$.

Je trace, en utilisant les cercles déjà tracés (d'un rayon suffisamment grand pour cela), les perpendiculaires au milieu des droites AB', AC' et je trace le cercle AB'C' op. : $(4R_1 + 2R_2 + 4C_1 + 3C_3)$.
Ce cercle coupe le cercle circonscrit au point R cherché :

Op. : $(12R_1 + 6R_2 + 13C_1 + 11C_3)$; simplicité : 42; exactitude : 23; 6 droites, 11 cercles.

Le point $\frac{a}{b - c}$, $\frac{b}{c + a} - \frac{c}{a + b}$, transformé continu en A du point $\frac{a}{b - c}$, etc., se construirait exactement par le même symbole; seulement, au lieu de mener les bissectrices extérieures des angles B et C je mènerai les bissectrices intérieures, etc.

REMARQUE. — Le point, R correspondant à une droite $\Sigma(a + \lambda)x = 0$, parallèle à l'axe antiortique, sera $\frac{a}{(a + \varphi)(b - c)}$, etc. Ces coordonnées représenteront ainsi, d'une façon très simple, un point quelconque du cercle circonscrit par la variation du paramètre φ .

2. — Soient P un point du plan d'un triangle ABC, L, M, N les milieux de BC, CA, AB; on sait que si L', M', N' sont les milieux de AP, BP, CP, les droites LL', MM', NN' sont concourantes en un point P'.

Soient x, y, z les coordonnées de P, x', y', z' celles de P'.

Les coordonnées de P' sont aussi $\frac{2ax + by + cz}{a}$, etc.

Les coordonnées de P sont aussi $\frac{-3ax' + by' + cz'}{a}$.

P' étant au milieu des droites LL', MM', NN', si P' est donné on a une construction géométrique facile de P.

Par exemple, si P' est le centre du cercle inscrit on a une construction immédiate assez simple du point $\odot : \frac{p-2a}{a}$, etc.

Si P' est le centre de gravité du périmètre $\frac{b+c}{a}$, etc., P est le point de Nagel.

On a facilement ce théorème :

Le centre de gravité du périmètre est au milieu de la distance du centre du cercle inscrit au point de Nagel $\frac{p-a}{a}$, etc., et les théorèmes dérivés que l'on obtient par transformation continue.

3. — Soit un triangle ABC. Je trace le cercle A(a); soit N le milieu de AB, CN coupera A(a) en deux points P et Q tels que $CP = 2l_a$ et $CQ = \frac{b^2 - a^2}{2l_c}$.

Ce théorème donne une construction relativement simple du point qui a pour coordonnées : $\frac{b^2 - c^2}{l_a}$, etc.

l_a, l_b, l_c sont les longueurs des trois médianes.

4. — Si M est un point quelconque du plan d'un triangle ABC, dont les coordonnées normales sont l, m, n ; si N est un point quelconque x, y, z de la conique circonscrite $\Sigma \frac{l(m-n)}{x} = 0$, qui passe par M et par le centre du cercle inscrit, le point V qui aura pour coordonnées lx, my, nz sera sur la droite MN.

Le lieu de V, si M est fixe, est la conique circonscrite $\Sigma \frac{l^2(m-n)}{x} = 0$, qui passe en M.

TÉORÈMES DIVERS ET RÉSULTATS DE CALCULS

G. — 1. — Les points jumeaux R', R'' des points de Brocard $\frac{b}{c}, \frac{c}{a}, \frac{a}{b}$; $\frac{c}{b}, \frac{a}{c}, \frac{b}{a}$ ont respectivement pour coordonnées :

$$\frac{1}{a(b^2 - a^2)}, \frac{1}{b(c^2 - b^2)}, \frac{1}{c(a^2 - c^2)},$$

$$\frac{1}{a(c^2 - a^2)}, \frac{1}{b(a^2 - b^2)}, \frac{1}{c(b^2 - c^2)}.$$

(Voir *Mathesis*, 1886, p. 5, où on les apèle conjugués ciclotomiques des points de Brocard.)

Ils sont sur la droite $\Sigma \frac{ax}{b^2 - c^2} = 0$ qui passe par le centre $\frac{(b^2 - c^2)^2}{a}$, etc. de l'hyperbole de Kiepert.

Ce centre est au milieu de la distance des points jumeaux.

De là un moyen assez simple de placer le centre de l'hyperbole de Kiepert.

2. — Les cercles d'Apollonius ou cercles décrits sur la droite qui joint les pieds des deux bissectrices des angles d'un triangle ABC comme diamètre, ont pour équation :

$$y^2 - z^2 - 2x(y \cos C - z \cos B) = 0, \text{ etc.}$$

3. — Si $x', y', z'; x'', y'', z''$ sont les coordonnées normales absolues de deux points A', A'' , $x' - x'', y' - y'', z' - z''$ représentent les coordonnées du point à l'infini sur $A'A''$.

4. — La polaire du point de Nagel $\frac{p-a}{a}$, etc., par rapport au cercle inscrit a pour équation : $\Sigma(ap - 8Rr)(p - a)x = 0$.

5. — L'axe antiortique $x + y + z = 0$, l'axe ortique $\Sigma x \cos A = 0$, la polaire trilinéaire $\Sigma \frac{ax}{p-a} = 0$ du point de Nagel et la droite qui joint le centre du cercle inscrit au centre du cercle circonscrit forment un faisceau de quatre droites qui concourent au point L dont les coordonnées normales sont $(b-c)(p-a)$, etc.

Si l'on applique la transformation continue en A, en B et en C, on a trois autres faisceaux de quatre droites concourantes; l'axe ortique qui ne change pas par transformation continue est une droite commune à ces quatre faisceaux.

La transformation continue en A, par exemple, montre que les droites :

$$-x + y + z = 0, \quad \Sigma x \cos A = 0, \quad Oo_a, \quad -\frac{ax}{p} + \frac{by}{p-c} + \frac{cz}{p-b} = 0,$$

se coupent au point : $(b-c)p, (a+c)(p-c), -(a+b)(p-b)$.

6. — Par un point O du plan d'un triangle ABC, je mène des parallèles aux trois côtés ; il y a entre ce point et les côtés six segments sur ces parallèles. La somme des carrés de ces six segments est minima pour le point inverse du milieu de la ligne qui joint les points de Brocard. Ce minimum est égal à : $\frac{(b^2 + c^2)(c^2 + a^2)(a^2 + b^2)}{5(p^2 - r\delta)^2 + 4S^2}$.

7. — Par un point O du plan d'un triangle ABC, je mène des parallèles aux trois côtés ; sur chaque parallèle à un côté, entre O et les deux autres côtés il y a deux segments ; soit p_a la valeur du produit de ces deux segments sur la parallèle à BC ; il y a de même p_b^2, p_c^2 . La somme $p_a^2 + p_b^2 + p_c^2$ est minima si O est le centre du cercle circonscrit et ce minimum est égal à R^2 .

8. — La transformation continue permet également de trouver immédiatement certains minima ou maxima de fonctions. Ainsi, dans notre mémoire de Besançon 1893, p. 143, nous avons montré que dans un triangle ABC le point pour lequel la somme $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c}$ est minima est le point a^2, b^2, c^2 et que ce minimum a pour valeur $\frac{2rS}{p^2 + 6Rr - 3r\delta} = \frac{4S^2}{\Sigma a^3}$.

La transformation continue en A montre immédiatement que le point pour lequel $\frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b} - \frac{z^2}{c}$ est minimum est le point $-a^2, b^2, c^2$ et que ce

$$\text{minimum est : } -\frac{2r_a S}{(p-a)^2 - 6Rr_a + 3r_a \delta_a} \text{ ou : } -\frac{4S^2}{-a^3 + b^3 + c^3}.$$

9. — Le centre de gravité γ du triangle formé par les points de contact du cercle inscrit avec les côtés d'un triangle a pour coordonnées :

$$\delta + r_a, \delta + r_b, \delta + r_c.$$

Le centre de gravité du triangle formé par les points de contact du cercle ex-inscrit r_a avec les côtés est un point γ_a dont les coordonnées, obtenues immédiatement par transformation continue en A, sont :

$$-(\delta_a - r), \delta_a + r_c, \delta_a + r_b.$$

10. — Il y a sur la droite Oo qui joint le centre du cercle inscrit au centre du cercle circonscrit deux points dont les distances aux trois sommets ABC sont respectivement proportionnelles à $p - a$, $p - b$, $p - c$.

La transformation continue faite en A montre immédiatement qu'il y a sur la droite Oo_a deux points dont les distances aux trois sommets A , B , C sont proportionnelles respectivement à $-p$, $(p - c)$, $(p - b)$.

11. — L'enveloppe des polaires trilinéaires des points de la droite de l'infini est la conique inscrite de Steiner.

CONSTRUCTION DU POINT xx' , yy' , zz'

H. — Soient ABC un triangle, P et Q deux points dont les coordonnées normales sont x, y, z ; x', y', z' ; placer le point N dont les coordonnées normales sont proportionnelles à xx' , yy' , zz' (fig. 1).

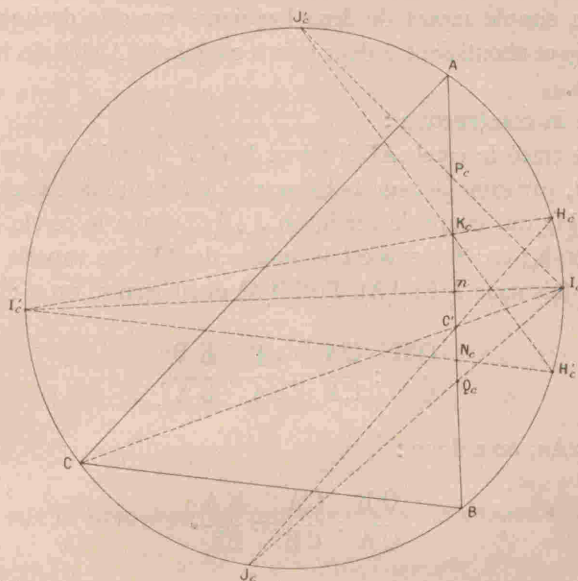


FIG. 1.

Si CP , CQ , CN coupent AB en P_c , Q_c , N_c (fig. 1), on aura :

$$\frac{Cx \text{ de } N_c}{Cy \text{ de } N_c} = \frac{Cx \text{ de } P_c \times Cx \text{ de } Q_c}{Cy \text{ de } P_c \times Cy \text{ de } Q_c}$$

ou :

$$\frac{N_c B}{N_c A} = \frac{P_c B \times Q_c B}{P_c A \times Q_c A} \cdot \frac{b}{a}$$

ou, si la bissectrice de C coupe BA en C' :

$$\frac{N_c B}{N_c A} = \frac{P_c B \times Q_c B \times C A}{P_c A \times Q_c A \times C B}.$$

Ceci peut s'écrire :

$$\frac{N_c B}{N_c A} = \frac{P_c B}{P_c A} \cdot \frac{Q_c B}{Q_c A} : \frac{C B}{C A}. \quad (1)$$

Or je sais trouver sur AB (voir Congrès de Caen, 1894, p. 57, Construction III) le point K_c , tel que :

$$\frac{K_c A}{B K_c} = \frac{Q_c B}{Q_c A} : \frac{C B}{C A},$$

c'est-à-dire réduire un rapport anharmonique de quatre points sur une droite à un simple rapport de deux longueurs sur cette droite ayant une extrémité K_c et aboutissant à deux points conjugués A et B de la division harmonique.

Je rapèle la construction :

Supposons tracé le cercle ABC: soient I_c et I'_c les milieux des deux arcs AB, I_c étant, par exemple, sur la bissectrice intérieure de l'angle C.

Je trace $I_c Q_c$ qui coupe le cercle en J_c ; $J_c C'$ coupe le cercle en H_c , $H_c I'_c$ coupe AB en K_c ; en effet, si n est le milieu de AB, les rapports anharmoniques des faisceaux $J_c(BI_c H_c A)$, $I'_c(BI_c H_c A)$ étant égaux, on a :

$$\frac{Q_c B}{Q_c A} : \frac{C A}{C B} = \frac{n B}{n A} : \frac{K_c B}{K_c A};$$

mais $nB = An$, on a donc :

$$\frac{Q_c B}{Q_c A} : \frac{C A}{C B} = \frac{K_c A}{B K_c}.$$

On a alors d'après (1) :

$$\frac{N_c B}{N_c A} = \frac{P_c B}{P_c A} \cdot \frac{K_c A}{B K_c}$$

ou :

$$\frac{N_c B}{A N_c} = \frac{P_c B}{P_c A} : \frac{K_c B}{K_c A}.$$

Pour placer N_c avec $AP_c KB$, j'opère come pour placer K_c avec $AQ_c CB$,

c'est-à-dire que je trace IP_c qui coupe la circonférence en J'_c ; je trace J'_cK_c qui coupe la circonférence en H'_c , enfin je trace $H'_cI'_c$ qui coupe AB en N_c .

J'opère de même sur un autre côté BC, par exemple, pour trouver N_a ; puis, je trace CN_c , AN_a qui se coupent en N.

Nous allons évaluer géométriquement la construction du point N.

Nous supposons que, sur l'épure, il n'y a de tracé que le triangle ABC et de marqués que les points P et Q.

Je trace les droites CP, CQ qui placent les points P_c , Q_c

. Op. : $(4R_1 + 2R_r)$.

Je trace le cercle circonscrit ABC, I_c se trouve placé par là même;

. Op. : $(4R_1 + 2R_2 + 5C_1 + 4C_3)$.

Je trace CI_c , I_cQ_c , J'_cC' , $H'_cI'_c$, IP_c , J'_cK_c , $H'_cI'_c$, N_cC . . . Op. : $(16K_1 + 8R_2)$.

Je fais la même construction pour avoir N_a en ne comptant pas le tracé du cercle circonscrit déjà tracé pour avoir N_c , de sorte que N aura été placé par

Op. : $(44R_1 + 22R_2 + 5C_1 + 4C_3)$; simplicité : 75; exactitude : 49; 22 droites, 4 cercles.

Il est clair que, de proche en proche, étant donés n points, on pourrait obtenir ainsi le point qui aurait pour coordonnées normales des quantités proportionnelles à des puissances positives ou négatives de ces points.

Cette construction a l'avantage de pouvoir *toujours* être exécutée sur l'épure quand le cercle circonscrit peut y être tracé.

M. É. LEMOINE

Ancien Élève de l'École Polytechnique, à Paris.

SUR LA DÉCOMPOSITION D'UN NOMBRE EN SES CARRÉS MAXIMA [I 18 c]

— Séance du 3 avril 1896 —

Dans une note présentée le 22 octobre 1882 à l'Académie des Sciences de Paris, j'ai considéré une décomposition des nombres entiers que je crois nouvelle, et je veux ajouter ici quelques développements sur le sujet.

DÉFINITION. — Si l'on a $(a_1, a_2 \dots a_p, n$ étant des nombres entiers)
 $A = a_1^n + a_2^n \dots a_p^n$ et que la racine $n^{\text{ième}}$ a_j d'un terme quelconque a_j^n du second

membre soit, à une unité près par défaut, la racine $n^{\text{ième}}$ du nombre formé par l'addition de a_j^n et de tous les nombres qui sont à sa droite dans le second membre, je dirai que A est décomposé en ses puissances $n^{\text{ièmes}}$ maxima.

Si A est composé ainsi d'une somme de p puissances $n^{\text{ièmes}}$, je dis que A est d'indice p et j'appelle y_p le plus petit nombre d'indice p .

En nous bornant à étudier le cas de $n = 2$ et remarquant que, dans ce cas, $y_1 = 1$; $y_2 = 2$; $y_3 = 3$, on aura, à partir de $p = 2$, pour former les y_p , l'équation de récurrence :

$$y_{p+1} = \left(\frac{y_p + 1}{2}\right)^2 + y_p, \quad \text{ou} \quad y_{p+1} = \left(\frac{y_p + 3}{2}\right)^2 - 2$$

laquelle permet, à partir de y_3 , de calculer y_4, y_5, \dots , etc.

Les nombres y_p croissent avec une extrême rapidité. Voici le tableau des dix premiers :

$y_1 = 1$	$= 1$
$y_2 = 2$	$= 2.1$
$y_3 = 3$	$= 2.2 - 1$
$y_4 = 7$	$= 2.4 - 1$
$y_5 = 23$	$= 2.12 - 1$
$y_6 = 167$	$= 2.84 - 1$
$y_7 = 7223$	$= 2.3612 - 1$
$y_8 = 13053767$	$= 2.6526884 - 1$
$y_9 = 42600227803223$	$= 2.21300113901612 - 1$
$y_{10} = 453694852221687377444001767$	$= 2.226847426110843688722000884 - 1$

ou, la décomposition en carrés maxima étant effectuée,

$y_1 = 1^2$
$y_2 = 1^2 + 1^2$
$y_3 = 1^2 + 1^2 + 1^2$
$y_4 = 2^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2$
$y_5 = 4^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2$
$y_6 = 12^2 + 4^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2$
$y_7 = 84^2 + 12^2 + 4^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2$
$y_8 = 3612^2 + 84^2 + 12^2 + 4^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2$
$y_9 = 6526884^2 + 3612^2 + 84^2 + 12^2 + 4^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2$
$y_{10} = 21300113901612^2 + 6526884^2 + 3612^2 + 84^2 + 12^2 + 4^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2$
$y_{11} = 226847426110843688722000884^2 + y_{10}$

Le second membre de y_p ne contient que l'unité et des carrés pairs.

Tous les carrés qui sont dans y_p se trouvent dans y_{p-1} , et y_p se forme de y_{p-1} en y ajoutant le carré z_p^2 , d'un certain nombre z_p .

A partir de $p=4$, $y_p + 2$ est un carré parfait. Ce carré, à partir

de $p = 7$, est terminé alternativement par 225 et par 769, et l'on a,
 $y_p + 2 = (z_p + 1)^2$.

z_p est le plus grand nombre dont le carré entre dans y_p décomposé
 en ses carrés maxima; on a (à partir de $p = 4$) l'équation de récurrence :

$$2z_{p+1} + 1 = (z_p + 1)^2$$

z_p est divisible par z_{p-1}

On a :

$$\begin{aligned} y_p &= z_p^2 + y_{p-1} \\ y_p &= 2 \cdot z_{p+1} - 1. \end{aligned}$$

Décomposons en facteurs (qui ne sont pas tous, nécessairement, des
 nombres premiers) les nombres z qui entrent dans le second membre
 des y_p et dont les carrés s'y retrouvent indéfiniment.

On a, pour les dix nombres z qui entrent dans y_{10} :

$$\begin{aligned} z_1 &= 1; z_2 = 1; z_3 = 1; z_4 = 1, 2; z_5 = 1, 2, 2; z_6 = 1, 2, 2, 3; z_7 = 1, 2, 2, 3, 7; \\ z_8 &= 1, 2, 2, 3, 7, 43; z_9 = 1, 2, 2, 3, 7, 43, 1807; z_{10} = 1, 2, 2, 3, 7, 43, 1807, 3263443. \end{aligned}$$

Nous avons dit que ces facteurs ne sont pas tous premiers, en effet, par
 exemple : $1807 = 13.139$.

REMARQUE. — A partir de z_9 les z se terminent tous alternativement par
 807 et par 443.

Si, à partir de $p = 5$, on considère les facteurs x qui permettent de
 déduire z_{j+1} de z_j , en multipliant z_j par l' x correspondant, on voit que
 ces facteurs sont : 2, 3, 7, 43, 1807, 3263443, 10650056950807, ... et l'on a :

$$x_{j+1} = (x_j - 1) x_j + 1.$$

En posant

$$x_0 = 1 \quad x_1 = 1,$$

on a :

$$x_{j+1} = x_0 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_j + 1$$

REMARQUE. — A partir de y_7 les y se terminent tous, alternativement
 par 223 et 767.

Dans la limite des tables de carrés dont on dispose, un nombre A peut
 se décomposer très rapidement en ses carrés maxima; en effet, s'il est
 entre n^2 et $(n + 1)^2$, le premier carré de la décomposition de A est n^2 , etc.

De la décomposition d'un nombre en ses carrés maxima on déduit
 immédiatement le théorème suivant :

Si $\sum s^2$ désigne un carré ou une somme de carrés tous différents entre eux,
 tout nombre entier est de la forme $\sum s^2 + p$ ($p = 0, 1, 2, 4$).

DÉCOMPOSITION ALTERNÉE

Il y a, dans le même genre, un autre mode de décomposition que nous appellerons décomposition d'un nombre en ses puissances $n^{\text{ièmes}}$ alternées minima.

DÉFINITION. — Soit A un nombre, si l'on a :

$$A = a_1^n - a_2^n + a_3^n - a_4^n + a_5^n - \dots \pm a_p^n,$$

que a_1, a_2, a_3, \dots soient entiers et que a_1 soit la racine $n^{\text{ième}}$ de A à une unité près *par excès*, R_1 étant le reste négatif; que a_2 soit la racine $n^{\text{ième}}$ de R_1 à une unité près *par excès*, R_2 étant le reste: a_3 la racine $n^{\text{ième}}$ de R_2 à une unité près *par excès*, etc., $a_1^n - a_2^n + a_3^n - a_4^n + a_5^n - \dots \pm a_p^n$ sera la décomposition alternée de A en ses puissances minima, p sera dit l'indice alterné de A. Nous ne nous occuperons également ici que du cas de $n = 2$.

Dans ce nouveau mode de décomposition, nous désignerons par Y, Z, X les nombres analogues à ceux que nous avons appelés y, z, x , dans la décomposition précédente.

On a :

$$\begin{aligned} 1 &= Y_1 = 1^1 \\ 3 &= Y_2 = 2^2 - 1 \\ 6 &= Y_3 = 3^2 - 2^2 + 1 \\ 10 &= Y_4 = 4^2 - 3^2 + 2^2 - 1 \\ 26 &= Y_5 = 6^2 - 4^2 + 3^2 - 2^2 + 1 \\ 170 &= Y_6 = 14^2 - 6^2 + 4^2 - 3^2 + 2^2 - 1 \\ 7226 &= Y_7 = 86^2 - 14^2 + 6^2 - 4^2 + 3^2 - 2^2 + 1 \\ 13053770 &= Y_8 = 3614^2 - 86^2 + 14^2 - 6^2 + 4^2 - 3^2 + 2^2 - 1 \\ 42600227803226 &= Y_9 = 6526886^2 - 3614^2 + 86^2 - 14^2 + 6^2 - 4^2 + 3^2 - 2^2 + 1 \\ 453694852221687377444001770 &= Y_{10} = 21300113901614^2 - Y_9 \end{aligned}$$

A partir de $p = 3$ on a : $Y_{p+1} = \left(\frac{Y_p + 2}{2}\right)^2 - Y_p$ ou

$$Y_{p+1} = \frac{Y_p^2}{4} + 1$$

Remarquons que, à partir de $p = 4$, $Y_p - 1$ est un carré.

Que, à partir de $p = 7$, les Y sont terminés alternativement par 226 et par 770;

Que, à partir de $p = 8$, les Z_p sont terminés alternativement par 614 et 886;

Que l'on a, à partir de $p = 3$, $Z_{p+1} = \frac{Y_p + 2}{2}$;

Et à partir de $p = 3$, $Z_p^2 = Y_p + Y_{p-1}$.

Dans Y_p se trouvent tous les carrés que contient Y_{p-1} , seulement ils y sont pris en signes contraires de ceux qu'ils ont dans Y_{p-1} , cela résulte d'ailleurs de la définition des nombres Y_p et c'est ce que la formule précédente exprime.

Nous pouvons remarquer qu'il y a de curieuses relations entre les X , les Y , les Z et les x , les y et les z .

Ainsi, à partir de $p = 4$, on a : $Y_p = y_p + 3$;

A partir de $p = 3$, on a : $Z_p = z_p + 2$.

Si l'on décompose en facteurs X les Z , on voit que l'on a :

$Z_1 = 1$; $Z_2 = 1.2$; $Z_3 = 1.3$; $Z_4 = 1.2.2$; $Z_5 = 1.2.3$; $Z_6 = 1.2.7$; $Z_7 = 1.2.43$; $Z_8 = 1.2.1807$; $Z_9 = 1.2.3263443$, etc., où l'on reconnaît les mêmes facteurs : 2, 3, 7, 43, 1807, 3263443, etc., déjà trouvés pour former les z .

A partir de $p = 7$ on a : $z_p = \frac{3}{2^{p-7}} \cdot Z_{p-1} \cdot Z_{p-2} \dots Z_7 \cdot Z_6$.

Nous remarquerons qu'il y a une troisième manière mixte de décomposer un nombre en ses puissances, c'est de prendre les racines $n^{\text{ièmes}}$, soit par excès, soit par défaut à une unité près, en choisissant la plus rapprochée du nombre dont on extrait la racine; ainsi, en prenant $n = 2$, on aura pour le nombre 31 par exemple :

Décomposition en carrés maxima : $31 = 5^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2$.

Décomposition en carrés alternés : $31 = 6^2 - 3^2 + 2^2$.

Décomposition en carrés mixtes : $31 = 6^2 - 2^2 - 1^2$.

Mais nous n'avons pas essayé l'étude de ce dernier mode de décomposition.

BIBLIOGRAPHIE

- Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences de Paris, oct. 1892 (É. LEMOINE).
Intermédiaire des Mathématiciens, t. I, 1894, p. 232 (É. LEMOINE).
Intermédiaire des Mathématiciens, t. II, 1895, p. 289 (WELSCH).

M. Ed. MAILLET

Ingénieur des Ponts et Chaussées, à Toulouse.

SUR LA FORMATION DES NOMBRES ENTIERS PAR SOMMATION DES TERMES
D'UNE SUITE RÉCURRENTÉ

[I 17 b, H 12 e]

— Séance du 3 avril 1896 —

On sait que tout nombre entier est la somme de quatre carrés, d'un nombre limité de cubes d'entiers positifs (*), d'un nombre limité de bicarrés (**). Or la suite des carrés, celle des cubes, celle des bicarrés forment des suites récurrentes, d'équations génératrices $(x-1)^3=0$, $(x-1)^4=0$, $(x-1)^5=0$. On peut donc se demander plus généralement si des propriétés semblables existent pour les suites récurrentes formées de nombres entiers, au moins en ce qui concerne les nombres supérieurs à une certaine limite, ou encore pour les suites qu'on en déduit en remplaçant chaque terme par sa valeur absolue.

Nous allons établir à cet égard le théorème suivant :

THÉORÈME. — Étant donnée une suite récurrente formée de nombres entiers, satisfaisant à la loi irréductible :

$$(1) \quad x_{n+p} = a_1 x_{n+p-1} + \dots + a_p x_n,$$

d'équation génératrice :

$$(2) \quad f(x) = x^p - a_1 x^{p-1} - \dots - a_p = 0.$$

Si les coefficients a_1, \dots, a_p sont entiers, une condition nécessaire pour que tout nombre entier positif, au moins à partir d'une certaine limite, soit, même à un nombre limité d'unités près, la somme d'un nombre fini de valeurs absolues des termes de la suite, est que (2) n'ait pour racines que des racines de l'unité, ou, ce qui revient au même,

(*) Voir notre communication au Congrès de Bordeaux, 1893.

(**) Théorème dû à Liouville.

qu'en prenant dans la suite les termes de h en h (h étant un entier ≥ 1 convenablement choisi), à partir du 1^{er}, du 2^e, ..., du $h^{\text{ème}}$ respectivement, on ait k suites récurrentes ayant pour équation génératrice commune $(x-1)^p = 0$, avec $p \leq p$.

Nous traiterons d'abord le cas simple des suites de premier ordre, de façon à indiquer la méthode suivie.

CAS DES SUITES DU PREMIER ORDRE. — Soit la suite :

$$(3) \quad x_0, a_1 x_0, a_1^2 x_0, \dots, a_1^n x_0, \dots,$$

qui est une progression géométrique, d'équation génératrice $x - a_1 = 0$, avec (*) a_1 réel et $|a_1| \geq 1$, la suite étant formée de nombres entiers.

Supposons que la propriété, dont nous voulons établir l'impossibilité en général, ait lieu pour cette suite. Alors, A étant un entier quelconque, il faudra que, pour $A \geq N$, N étant fini, on ait :

$$(4) \quad A = \sum |a_1^i x_0| + \varepsilon,$$

le signe \sum s'étendant à δ valeurs de i au plus, et ε étant un entier, $\leq \eta$, δ et η étant finis et déterminés. A serait ainsi, à un nombre fini d'unités près, la somme d'un nombre $\leq \delta$ de valeurs absolues des termes de la suite.

En prenant n assez grand, ceci aura lieu pour tous les nombres A tels que :

$$(5) \quad N \leq A \leq |a_1^n x_0|;$$

pour chacun d'eux on aura dans (4) $i \leq n$: ces nombres devront donc s'obtenir tous, au moins une fois, en formant la somme des valeurs absolues des $n+1$ premiers termes de la suite (3) 1 à 1, 2 à 2, ..., δ à δ de toutes les manières possibles en admettant les répétitions, puis ajoutant successivement à chaque résultat 0, 1, 2, ..., η unités. Or, on obtient ainsi au plus :

$$(\eta + 1)(D_{n+1}^1 + D_{n+1}^2 + \dots + D_{n+1}^\delta)$$

nombres distincts, les D indiquant des combinaisons avec répétition, et

(*) Nous désignons par $|K|$, $|L|$, ... les valeurs absolues de K , L , ... respectivement.

il faudrait, puisque le nombre des nombres satisfaisant à (5) est

$$|a_1^n x_0| = N + 1,$$

$$(6) \quad (\eta + 1)(D_{n+1}^1 + D_{n+1}^2 + \dots + D_{n+1}^\delta) \geq |a_1^n x_0| = N + 1.$$

Le premier membre de cette inégalité étant un polynôme entier en n à coefficients finis, on sait que, si $|a_1| > 1$, on peut toujours prendre n assez grand, N étant fini, pour qu'elle soit impossible; il faut donc :

$$|a_1| = 1.$$

En prenant alors dans (3) les termes de deux en deux à partir du premier et du deuxième respectivement, on obtient deux progressions géométriques d'équation génératrice $x - a_1^2 = x - 1 = 0$, ce qui établit le théorème pour les suites du premier ordre.

CAS GÉNÉRAL. — On doit remarquer d'abord que si la suite proposée, de loi (1) et d'équation génératrice (2), ne contient qu'un nombre limité de termes différents, la somme des valeurs absolues de δ termes au plus de la suite et de η unités au plus est toujours finie. On en conclut :

LEMME. — L'impossibilité de la propriété supposée est absolue pour toute suite qui ne comprend qu'un nombre limité de termes différents.

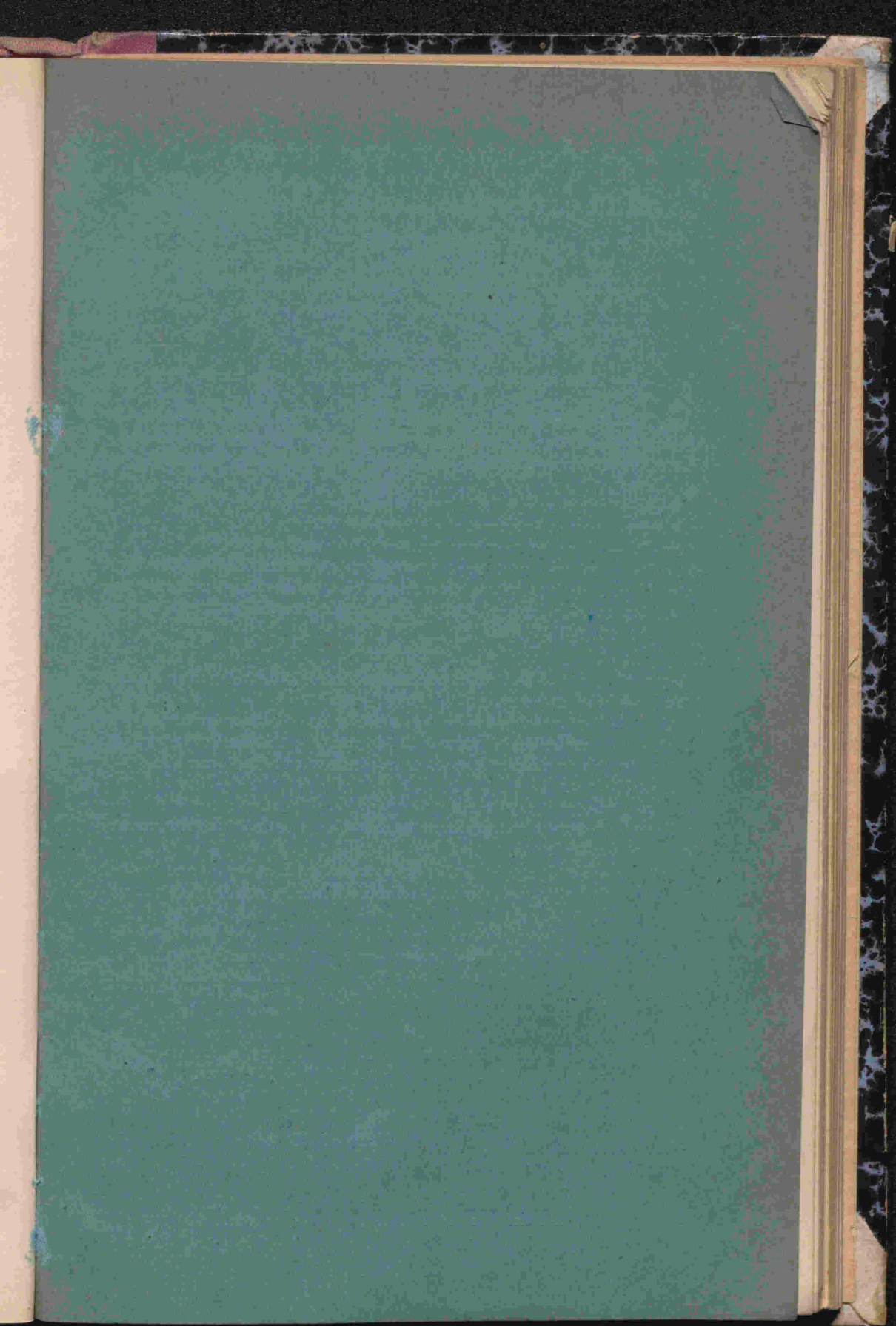
Par suite, d'après ce qui précède, la propriété est absolument impossible pour les progressions géométriques.

Si alors $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_q$ sont les racines distinctes de (2), en nombre $q \leq p$, on a :

$$(7) \quad x_n = \lambda_1^n \varphi_1(n) + \lambda_2^n \varphi_2(n) + \dots + \lambda_q^n \varphi_q(n),$$

où $\varphi_1(n), \varphi_2(n), \dots, \varphi_q(n)$ sont des polynômes de degrés $r_1 - 1, r_2 - 1, \dots, r_q - 1$, si r_1, r_2, \dots, r_q sont les ordres de multiplicité respectifs des racines $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_q$.

La loi considérée étant irréductible pour la suite, le coefficient de n^{r_i-1} dans $\varphi_i(n)$ sera $\neq 0$, quel que soit i . De plus, la suite considérée étant formée de nombres entiers ne renfermerait qu'un nombre limité de termes différents, si toutes les racines $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_q$ avaient leurs modules < 1 . Si donc nous supposons que la propriété en question soit possible pour la suite considérée, nous devons admettre, d'après le lemme précédent, qu'une des racines a son module ≥ 1 , et même que son ordre de multiplicité est supérieur à 1, si aucune des racines n'a son module > 1 .



ASSOCIATION FRANÇAISE

POUR L'AVANCEMENT DES SCIENCES

EXTRAIT DES STATUTS ET RÈGLEMENT

STATUTS

ART. 4. — Les membres de l'Association sont admis, sur leur demande, par le Conseil.

ART. 5. — Sont membres de l'Association les personnes qui versent la cotisation annuelle. Cette cotisation peut toujours être rachetée par une somme versée une fois pour toutes. Le taux de la cotisation et celui du rachat sont fixés par le Règlement.

ART. 6. — Sont membres fondateurs les personnes qui ont versé, à une époque quelconque, une ou plusieurs souscriptions de 500 francs.

ART. 7. — Tous les membres jouissent des mêmes droits. Toutefois, les noms des membres fondateurs figurent perpétuellement en tête des listes alphabétiques, et ces membres reçoivent gratuitement, pendant toute leur vie, autant d'exemplaires des publications de l'Association qu'ils ont versé de fois la souscription de 500 francs.

RÈGLEMENT

ARTICLE PREMIER. — Le taux de la cotisation annuelle des membres non fondateurs est fixé à 20 francs.

ART. 2. — Tout membre a le droit de racheter ses cotisations à venir en versant, une fois pour toutes, la somme de 200 francs. Il devient ainsi membre à vie.

Il sera loisible de racheter les cotisations par deux versements annuels consécutifs de 100 francs.

Les membres ayant payé pendant vingt années consécutives la cotisation annuelle de 20 francs pourront racheter les cotisations à venir moyennant un seul versement de 100 francs.

Tout membre qui pendant dix années consécutives aura versé annuellement une somme de 10 francs en sus de la cotisation annuelle sera libéré de tout versement ultérieur.

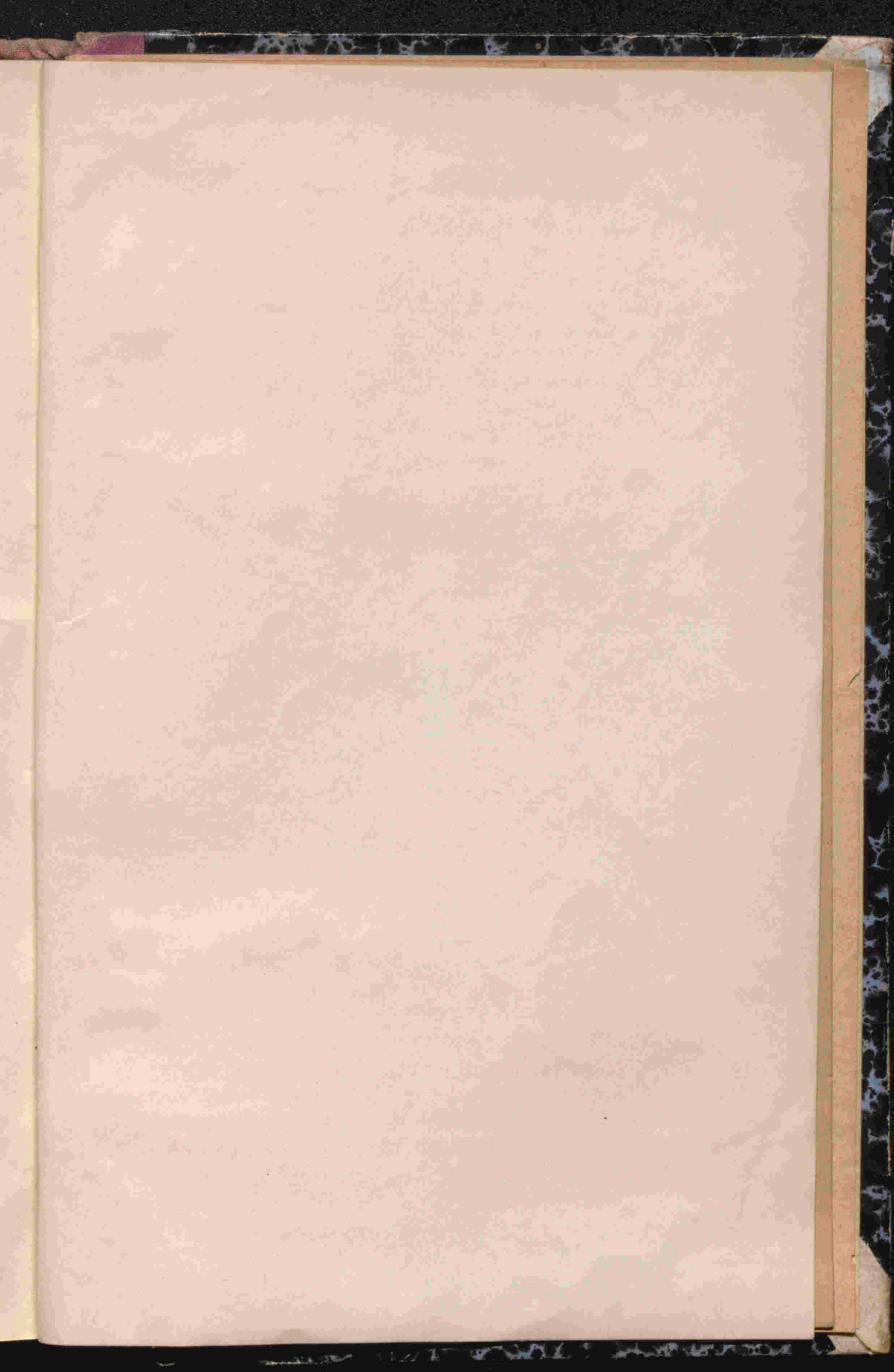
La liste alphabétique des membres à vie est publiée en tête de chaque volume, immédiatement après la liste des membres fondateurs.

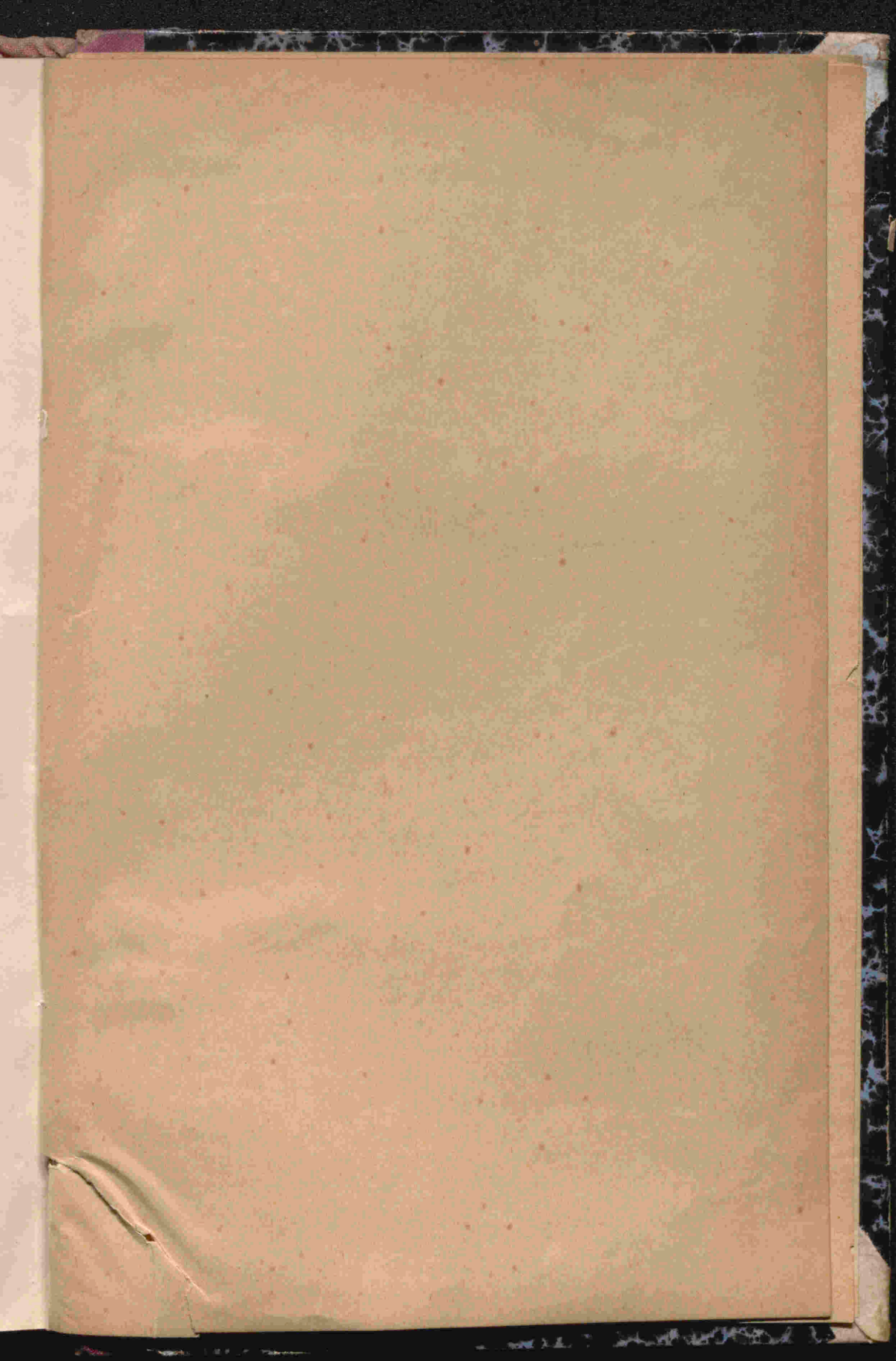
Les membres ayant racheté leurs cotisations pourront devenir membres fondateurs en versant une somme complémentaire de 300 francs.

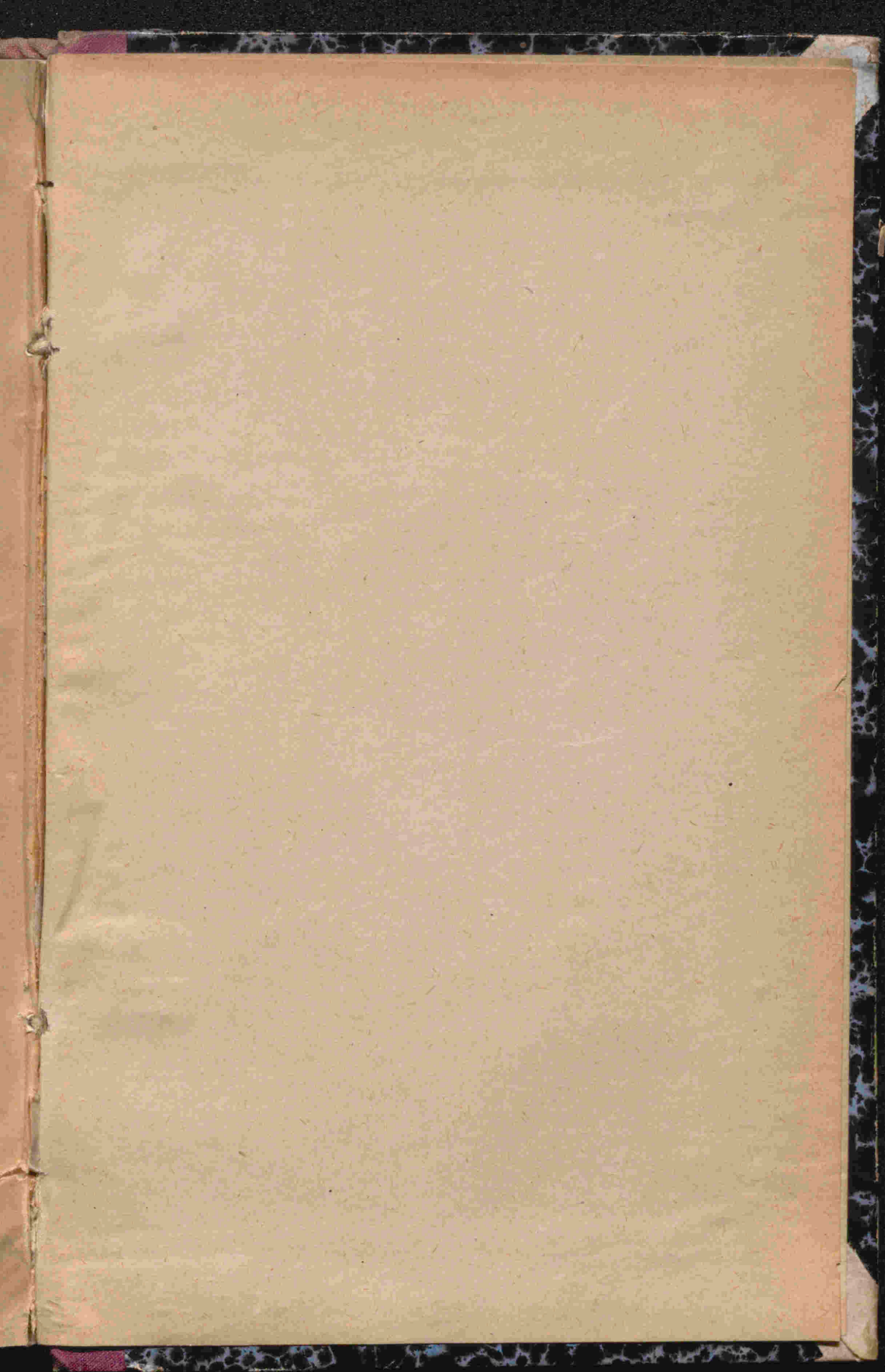
Les souscriptions des membres fondateurs peuvent être versées en une seule fois ou en deux versements annuels consécutifs de 250 francs.

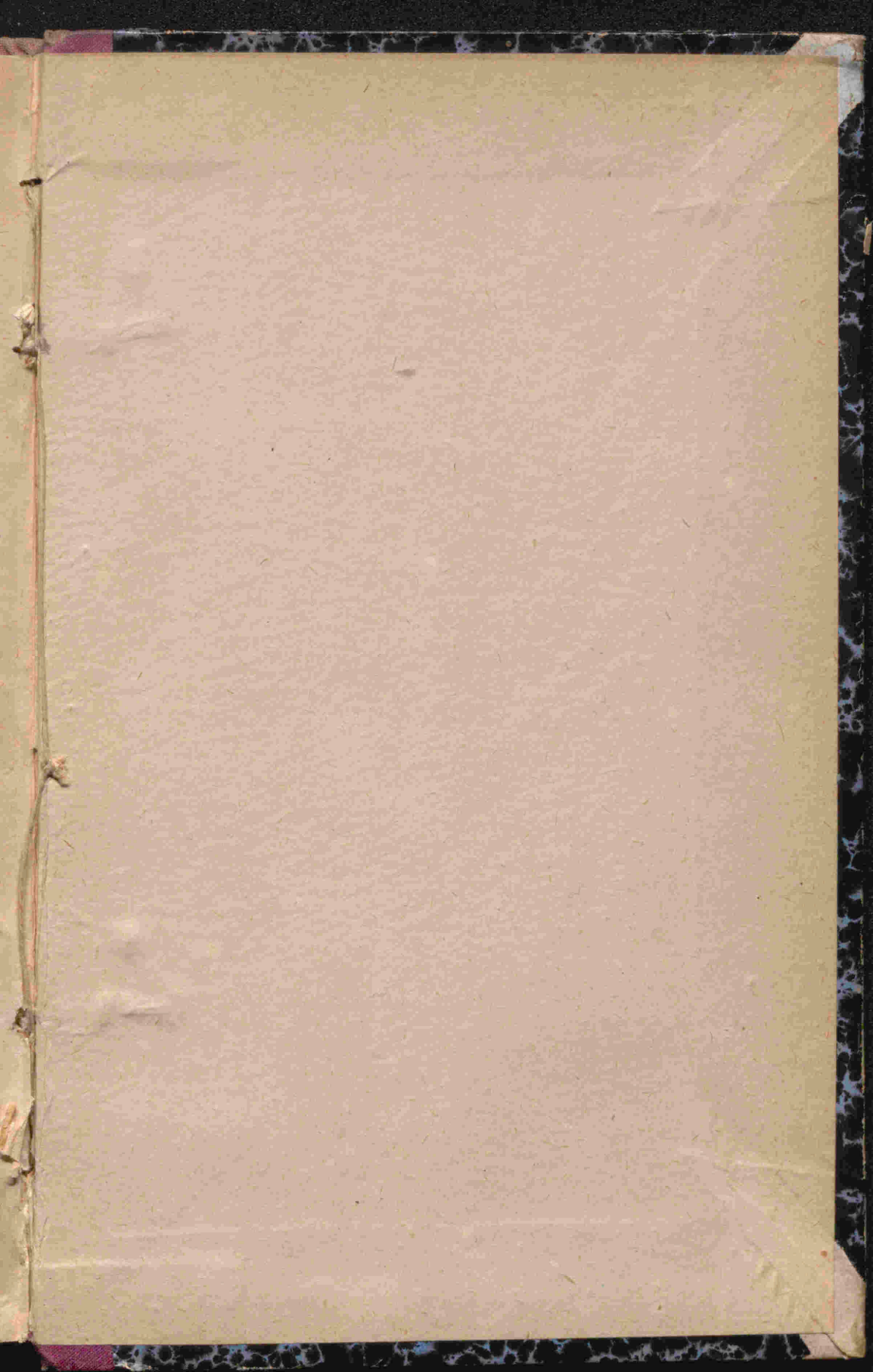
Les souscriptions sont reçues :

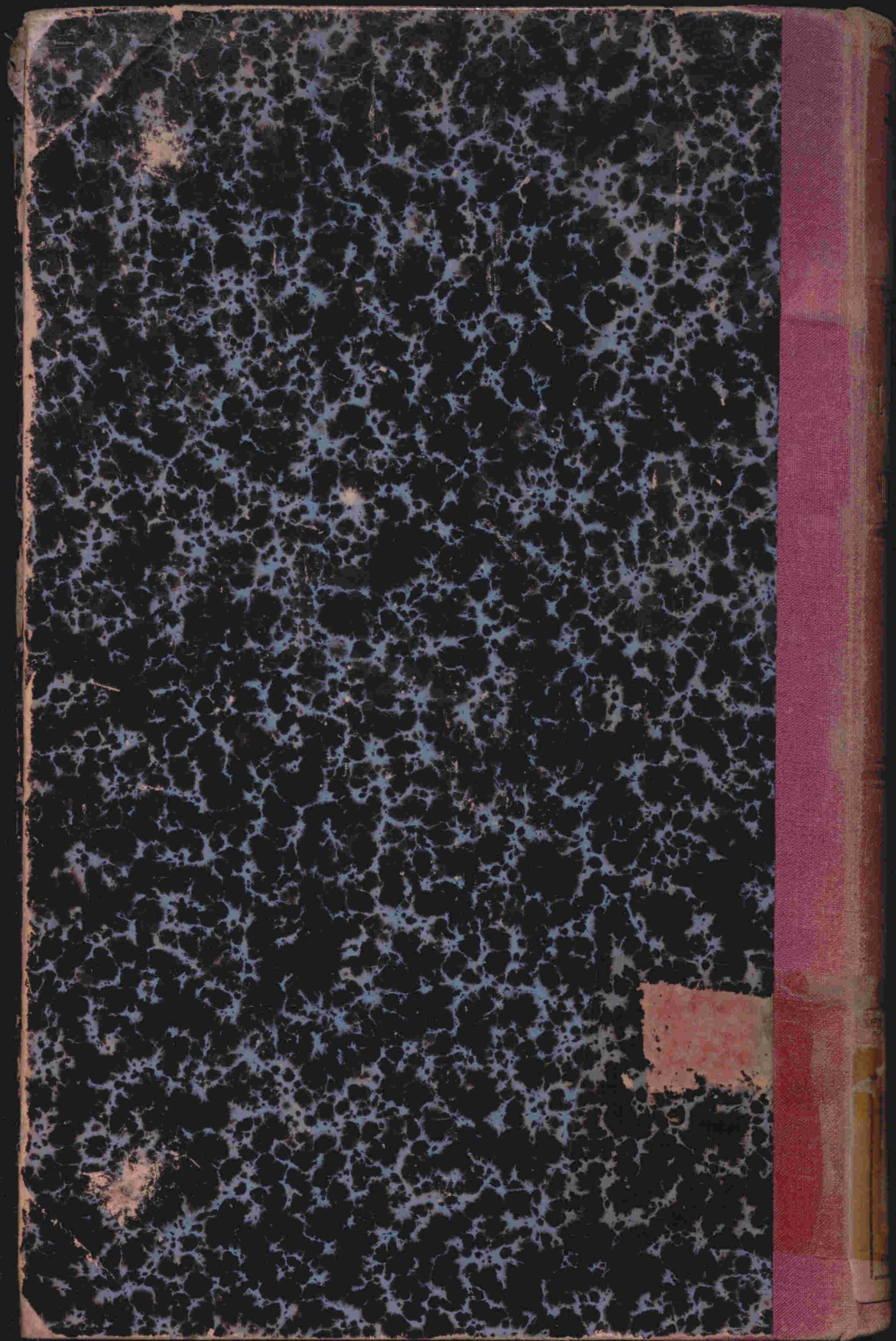
Au Secrétariat, 28, rue Serpente, à Paris.











Dedekind

MEMOIRES
SUR
LOGIQUE
ET
MATHEMATIQUES

L.5611

Registro n.º