







Ex libris

Doctoris

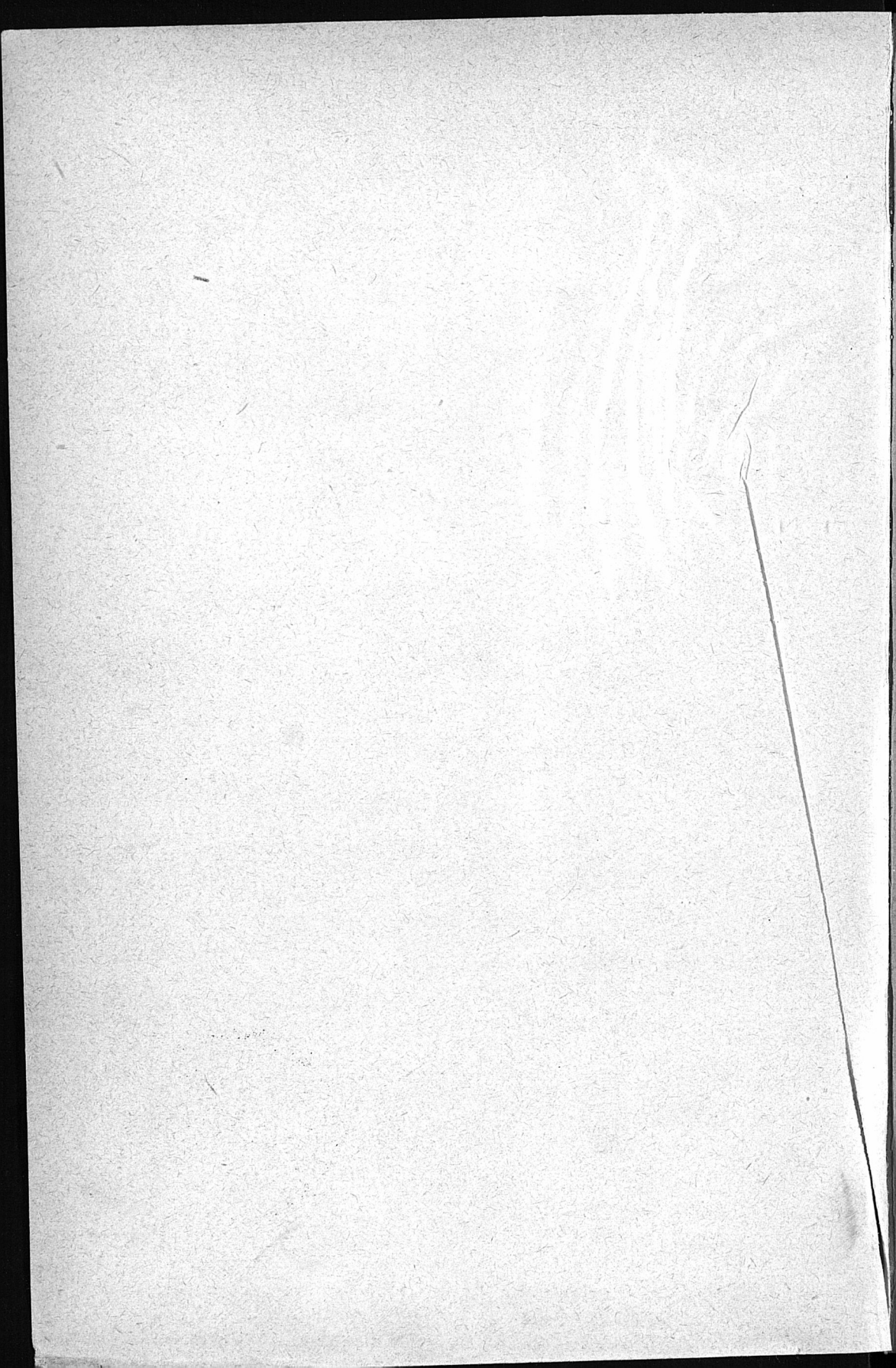
Bonaventurae

Reyes Prósper.











A Monsieur Ventura Prosper y Reyes

05739000/01 *hommage de l'auteur*

SEPT LOIS

FONDAMENTALES

DE LA THÉORIE

DES ÉGALITÉS LOGIQUES



PAR PLATON PORETSKY,

docteur d' Astronomie.



KAZAN'  
КАЗАНЬ.

Типо-литография Императорскаго Университета.  
TIPO-LITOGRAFIA IMPERATORSKAGO UNIVERSITETA  
1899.

T



Извѣстія Физико-Математическаго Общества при Императорскомъ  
Казанскомъ Университетѣ т. VIII. № 2, 3, 4.



SEPT LOIS  
FONDA MENTA LES  
DE LA THÉORIE  
DES ÉGALITÉS LOGIQUES



PAR PLATON PORETSKY,

docteur d' Astronomie.



КАЗАНЬ.

Типо-литографія Императорскаго Университета.

1899.





Печатано по опредѣленію Совѣта Физико-Математическаго Общества  
при Императорскомъ Казанскомъ Университетѣ.

Предсѣдатель *А. Васильевъ.*



# I.

## La loi de l'équivalence (ou des formes) des égalités logiques.

Le but de cet article est de trouver pour chaque égalité logique  $A=B$  toutes ses formes différentes ou, ce qui est la même chose, toutes les égalités isolées équivalentes à elle.  $A$  présent nous ne savons que trois des ces formes \*) et nommément:

$$(A=B)=(A_0=B_0)=(AB_0+A_0B=0)= \\ = (AB+A_0B_0=1), \dots \dots (1)$$

où  $A_0$  et  $B_0$  sont les négations des classes  $A$  et  $B$ .

Pour avoir la résolution générale de cette question importante, il suffit de satisfaire à la condition:

$$(A=B)=[U=f(U,A,B)] , \dots \dots (2)$$

où la fonction  $U$  doit être tout à fait arbitraire et la structure de la fonction  $f$  doit être convenablement déterminée.

Pour distinguer les formes des égalités, convenons de dire que chaque égalité  $P=Q$  est l'une des déterminations de la classe  $P$  qui est son membre gauche et que

---

\*) Voyez le «Formulaire de Mathématiques» de M. Peano, 1897, t. 2. N° 1, propositions 113 et 351; aussi «Algebra der Logik» von Schröder, B. 2, S 32 und 33, th. 32 und 39.



chaque égalité  $G=H$  équivalente à la première est la détermination complète de  $G$  tirée de cette première égalité. Par exemple, l'égalité  $A_0=B_0$  est l'une des déterminations de la classe  $A_0$  et en même temps c'est sa détermination complète tirée de l'égalité  $A=B$  ou de l'égalité  $AB_0+A_0B=0$  ou encore de l'égalité  $AB+A_0B_0=1$ .

Vu que l'égalité  $0=AB_0+A_0B$  est la détermination complète du zéro tirée de l'égalité donnée  $A=B$ , nous pouvons dire que la fonction  $AB_0+A_0B$  présente le complet zéro (ou rien) logique de cette égalité  $A=B$ . Nous désignerons cette fonction par le symbole  $N$  (la lettre initiale du mot Nihil). Pareillement relativement à la fonction  $AB+A_0B_0$  qui figure dans l'égalité  $1=AB+A_0B_0$  équivalente à la même égalité  $A=B$ , nous dirons que c'est le complet logique tout (la complète unité logique) de la même égalité donnée  $A=B$  et la désigner par le symbole  $M$  (la lettre initiale du mot Mundus).

Cela posé, toutes les trois formes connues de l'égalité  $A=B$  nous pouvons écrire ainsi:

$$(A=B)=(A_0=B_0)=(0=N)=(1=M),$$

où

$$N=M_0=AB_0+A_0B, \quad M=N_0=AB+A_0B_0. \dots (3)$$

Avant de donner la formule embrassante toutes les formes de l'égalité  $A=B$ , je propose ce théorème nouveau:

$$(A=B)=(U=UM, \quad U=U+N), \dots (4)$$

c'est à dire que chaque égalité isolée  $A=B$  est équivalente au système de deux égalités  $U=UM$ ,  $U=U+N$ , où la classe  $U$  est tout à fait arbitraire et les classes  $M$  et  $N$  ont les significations données plus haut (3).



La démonstration de ce théorème est très simple: il suffit de dévoiler que l'égalité  $0=N$  qui est équivalente à l'égalité  $A=B$  est aussi équivalente au système  $U=UM$ ,  $U=U+N$ . Mais cela est ainsi car on sait <sup>1)</sup> que

$$\begin{aligned}(U=UM) &= (0=UM_0) = (0=UN), \\ (U=U+N) &= (N=UN) = (0=U_0N), \\ (U=UM, U=U+N) &= (0=UN, 0=U_0N) = \\ &= (0=UN+U_0N) = (0=N)\end{aligned}$$

Le théorème (4) nous montre que la prémisse „ $A$  et  $B$  sont les classes équivalentes l'une à l'autre“ est équivalente à l'assertion que chaque classe arbitraire  $U$  est contenue dans le complet tout logique de cette prémisse et contient son complet logique rien.

Il ne nous reste que d'unir les deux déterminations de la classe  $U$  exprimées par le système  $U=UM$ ,  $U=U+N$  en une seule détermination de la même classe. A cet but est destiné le théorème suivant:

$$(U=UM, U=U+N) = (U=UM+U_0N), \dots (5)$$

dont la démonstration est aussi très simple. En effet la détermination complète du zéro tirée de l'égalité  $U=UM+U_0N$  à l'aide de la règle générale  $(A=B) = (0=AB_0+A_0B)$  nous donne:

$$\begin{aligned}(U=UM+U_0N) &= [0=U(UM+U_0N)_0^2 + U_0(UM+U_0N)] \\ &= [0=U(UM_0+U_0N_0+U_0N)] = [0=UM_0+U_0N] = \\ &= [0=UN+U_0N] = (0=N),\end{aligned}$$

<sup>1)</sup> Voyez les propositions 52, 212, 324 et 342 du „Formulaire“ 1897.

<sup>2)</sup> Voyez „Algebra der Logik“, B. 2, S. 34, th. 46.

ce qui démontre la proposition.

Il est clair à présent que la détermination isolée  $U = UM + U_0N$  dont nous savons déjà qu'elle est équivalente au système des deux déterminations  $U = UM$ ,  $U = U + N$  doit être lue ainsi: la classe  $U$  est contenue dans la fonction  $M$  et contient la fonction  $N$ . \*)

De la combinaison des deux simples théorèmes démontrés plus haut nous recevons la formule générale

$$(A=B) = (U = UM + U_0N)$$

ou, ce qui est la même chose:

$$(A=B) = [U = U(AB + A_0B_0) + U_0(AB_0 + A_0B)], \dots \quad (I)$$

qui exprime la loi de l'équivalence (ou des formes) des égalités logiques. En substituant à la classe arbitraire  $U$  toutes les classes ou les fonctions possibles nous épuiserons toutes les formes de chaque égalité donnée  $A=B$ .

Pour les valeurs consécutives  $U=A$ ,  $U=A_0$ ,  $U=0$  et  $U=1$  la formule (I) nous donne:

$$(A=B) = [A = A(AB + A_0B_0) + A_0(AB_0 + A_0B) = \\ = AB + A_0B = B] = (A=B),$$

$$(A=B) = [A_0 = A_0(AB + A_0B_0) + A(AB_0 + A_0B) = \\ = A_0B_0 + AB_0 = B_0] = (A_0=B_0),$$

$$(A=B) = [0 = 0(AB + A_0B_0) + 1(AB_0 + A_0B) = \\ = AB_0 + A_0B] = (0 = AB_0 + A_0B),$$

---

\*) En général dans chaque formule de la forme  $X = XY + X_0Z$  nous devons la réitération du symbole à déterminer  $X$  exprimer par les mots „est contenu dans“, le symbole  $X_0$  par le mot „contient“ et le signe  $+$  par le mot „et“. Ainsi toute formule donnée plus haut désigne que la classe  $X$  est équivalente à la classe qui est contenue dans la classe  $Y$  et contient la classe  $Z$ .



$$(A=B)=[1=1(AB+A_0B_0)+0(AB_0+A_0B)=\\=AB+A_0B_0]=(1=AB+A_0B_0),$$

c'est à dire toutes les formes qui nous étaient déjà connues.

Pour trouver une des formes nouvelles de la même égalité  $A=B$  posons par exemple  $U=AB_0$  et par conséquent  $U_0=A_0+B$ . Nous aurons:

$$(A=B)=[AB_0=AB_0(AB+A_0B_0)+(A_0+B)(AB_0+A_0B)=\\=A_0B]=(AB_0=A_0B).$$

Donc l'égalité étrange  $AB_0=A_0B$  est l'une des formes de l'égalité  $A=B$ .

Pour vérifier ce résultat par les arguments indépendants, nous démontrons que l'une de ces deux égalités est la conséquence de l'autre. En effet:

1°. La multiplication des deux membres de l'égalité  $A=B$  d'abord par la classe  $B_0$  et puis par la classe  $A_0$  nous donne ses deux conséquences:  $AB_0=0$  et  $0=A_0B$ , d'où il suit que  $AB_0=A_0B$ .

2°. En ajoutant aux deux membres de l'égalité  $AB_0=A_0B$  d'abord la classe  $A$  et puis la classe  $B$  nous recevons ses deux conséquences:  $A=A+A_0B=A+B$  et  $B+B+AB_0=B+A=B$ , d'où il suit que  $A=B$ .

Donc les deux égalités  $A=B$  et  $AB_0=A_0B$  étant les conséquences mutuelles doivent être équivalentes l'une à l'autre.

Demandons à présent: combien des formes distinctes peut avoir chaque égalité donnée  $A=B$ ? Il est évident que le nombre de ces formes doit être infini, car la valeur de la fonction  $U$  dans la formule (I) est tout à fait arbitraire. Mais nous pouvons diviser toutes ces formes en deux groupes: 1) les formes principales qui ne sont construites qu'à

l'aide de  $n$  lettres  $a, b, c, d, \dots$ , qui figurent dans l'égalité donnée  $A=B$  et 2) les formes *secondaires* qui dépendent, outre ces  $n$  lettres, d'une ou plus de lettres  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  étrangères à l'égalité  $A=B$ . Le nombre des formes distinctes principales est égal au nombre  $2^{2^n}$  qui est le nombre des classes distinctes qu'on peut composer avec  $n$  lettres. Quant au nombre des formes secondaires, il est infini.

Trouvons toutes les formes principales de l'égalité  $A=B$  en supposant que  $A$  et  $B$  sont les classes simples (c'est à dire les lettres du discours). En ce cas le nombre  $n$  est égal à 2, le nombre  $2^{2^n}$  est 16, toutes les 16 distinctes classes formées des deux lettres  $A$  et  $B$  sont:

$$A, A_0, B, B_0, 0, 1, AB, AB_0, A_0B, A_0B_0, A+B, A+B_0, \\ A_0+B, A_0+B_0, AB+A_0B_0, AB_0+A_0B$$

et toutes les 16 formes principales de l'égalité  $A=B$  déduites de la formule (I) seront:

$$A=B, A_0=B_0, B=A, B_0=A_0, 0=AB_0+A_0B, \\ 1=AB+A_0B_0, AB=A+B, AB_0=A_0B, A_0B=AB_0, \\ A_0B_0=A_0+B_0, A+B=AB, A+B_0=A_0+B, A_0+B= \\ =A+B_0, A_0+B_0=A_0B_0, AB+A_0B_0=1, AB_0+A_0B=0.$$

Si nous rejetons d'ici les huit égalités qui peuvent être déduites d'autres huit par le simple changement des membres gauches et droits, nous aurons la chaîne de ces huit formes totalement distinctes de la prémisse „ $A$  et  $B$  sont la même chose“:

$$\left. \begin{aligned} (A=B) &= (A_0=B_0) = (0=AB_0+A_0B) = \\ (1=AB+A_0B_0) &= (AB=A+B) = (AB_0=A_0B) = \\ (A_0B_0=A_0+B_0) &= (A+B_0=A_0+B). \end{aligned} \right\} \dots (6)$$



Pour faire voir une des formes secondaires de la même égalité  $A=B$ , posons dans la formule (I)  $U=A+x$  et par conséquent  $U_0=A_0x_0$ . Nous aurons:

$$(A=B)[A+x=(A+x)(AB+A_0B_0)+A_0x_0(AB_0+A_0B)] = \\ = (A+x=AB+A_0B_0x+A_0Bx_0).$$

Encore un petit exemple. Pour l'égalité  $a(bc+b_0c_0)+a_0b=0$  (qui doit avoir le nombre 128 des formes principales totalement distinctes) la forme de détermination de la classe  $ac_0$  se trouvera ainsi:

$$N=a(bc+b_0c_0)+a_0b, \quad M=N_0=a(bc_0+b_0c)+a_0b_0; \quad ac_0= \\ ac_0M+(a_0+c)N=ac_0[a(bc_0+b_0c)+a_0b_0]+(a_0+c)a(bc+ \\ +b_0c_0)+a_0b]=abc_0+a_0b+abc=ab(c+c_0)+a_0b=ab+a_0b=b,$$

d'où nous concluons que

$$[a(bc+b_0c_0)+a_0b=0]=(ac_0=b).$$

Il est utile à indiquer que l'emploi des „subsumtions“ \*) au lieu des égalités n'est pas capable de nous conduire à la connaissance de la loi des formes des prémisses, car, quoique les égalités simples  $U=UM$ ,  $U=U+N$  peuvent être remplacées par les subsumtions  $U<M$ ,  $N<U$ , l'égalité composée  $U=UM+U_0N$  ne peut point être représentée par aucune des subsumtions séparées. Cela nous montre que l'idée de remplacer les égalités par les subsumtions ne peut pas être nommée féconde.

En remplaçant dans la formule générale (I) les symboles  $B$  et  $B_0$  par les symboles  $A$  et  $A_0$  nous aurons:

---

\*) On peut remplacer l'égalité de la sorte  $P=PQ$  qui exprime la prémisses „ $P$  est contenue dans  $Q$ “ par la subsumtion  $P<Q$ .

$$(A=A)=[U=U(A+A_0)+U_0(0+0)]=(U=U). \dots (7)$$

Donc toutes les identités logiques sont équivalentes les unes aux autres.

Le remplacement dans la même formule (I) des symboles  $B$  et  $B_0$  par les symboles  $A_0$  et  $A$  nous donnera:

$$(A=A_0)=[U=U0+U_0(A+A_0)]=(U=U_0). \dots (8)$$

Donc toutes les absurdités logiques sont aussi équivalentes les unes aux autres.

Posons encore dans la même formule (I):

$$A=0, B=Gx+Hx_0, U=x,$$

$x$  étant une des classes simples. Nous aurons:

$$\begin{aligned} (0=Gx+Hx_0) &= [x=x(G_0x+H_0x_0)+x_0(Gx+Hx_0)] = \\ &= (x=G_0x+Hx_0), \dots (9) \end{aligned}$$

D'où nous concluons que l'égalité  $Gx+Hx_0=0$  est équivalente à la détermination composée:  $x$  est contenue dans  $G_0$  et contient  $H$ . La formule (9), publiée par moi \*) en 1884, était donnée après par M. Schröder. \*\*).

Quant au criterium de l'équivalence des deux égalités données  $A=B$  et  $C=D$ , il est clair que pour ce but peuvent servir: 1° la formule générale:

$$\begin{aligned} U(AB+A_0B_0)+U_0(AB_0+A_0B) &= U(CD+C_0D_0)+ \\ &+ U_0(CD_0+C_0D) \end{aligned}$$

et 2° beaucoup des formules particulières, par exemple celles-ci:

\*) Voyez mon livre russe „Sur les moyens de résolution des égalités logiques“, p. 72.

\*\*) „Algebra der Logik“, B 1, S. 502.



$$\begin{aligned}
 AB_0 + A_0B &= CD_0 + C_0D, \\
 AB + A_0B_0 &= CD + C_0D_0, \\
 A &= B(CD + C_0D_0) + B_0(CD_0 + C_0D), \\
 B &= A(CD + C_0D_0) + A_0(CD_0 + C_0D), \dots \quad (10) \\
 C &= D(AB + A_0B_0) + D_0(AB_0 + A_0B), \\
 D &= C(AB + A_0B_0) + C_0(AB_0 + A_0B).
 \end{aligned}$$

Si l'une de ces égalités est satisfaite identiquement, les égalités  $A=B$  et  $C=D$  sont équivalentes l'une à l'autre. Par exemple, les deux égalités  $ab=a+b$  et  $ab_0=a_0b$  sont équivalentes parce que la formule (10) nous donne l'identité:

$$\begin{aligned}
 a+b &= ab[ab_0.a_0b + (a_0+b)(a+b_0)] + (a_0+b_0)[ab_0(a+b_0) + \\
 &\quad + a_0b(a_0+b)] = ab + ab_0 + a_0b = a + a_0b = a + b.
 \end{aligned}$$

Notre formule (I) exprime aussi la loi des déterminations complètes dont l'énoncé est tel: de chaque égalité donnée  $A=B$  on obtiendra la détermination complète de chaque classe volontaire  $U$  en exprimant que cette classe est contenue dans le complet tout logique de cette égalité et contient son complet logique rien.

Pour avoir les formes spéciales de la formule générale (I), posons consécutivement:

$$B=AC, \quad B=A+D, \quad B=AX+A_0Y$$

et nous aurons:

$$(A=AC)=[U=U(A_0+C)+U_0AC_0], \dots \dots \dots (II)$$

$$(A=A+D)=[U=U(A+D_0)+U_0A_0D], \dots \dots \dots (III)$$

$$(A=AX+A_0Y)=[U=U(AX+A_0Y_0)+U_0(AX_0+A_0Y)](IV)$$

Toutes les formes principales et totalement distinctes seront:

1° pour l'égalité  $A=AC$ :

$$\begin{aligned} (A=AC)=(C=C+A)=(A_0=A_0+C_0)=(C_0=A_0C_0)=\{ \\ = (0=AC_0)=(1=A_0+C)=(A_0C=A_0C+AC_0)=\} \quad (11) \\ = (A+C_0=AC+A_0C_0) \end{aligned}$$

et 2°, pour l'égalité  $A=A+D$ :

$$\begin{aligned} (A=A+D)=(D=AD)=(A_0=A_0D_0)=\{ \\ D_0=A_0+D_0)=(0=A_0D)=(1=A+D_0)=\} \quad (12) \\ (AD_0=(AD_0+A_0D)=(A_0+D=AD+A_0D_0) \end{aligned}$$

Je ne donne pas ici les formes correspondantes de la troisième égalité  $A=AX+A_0Y$  car le nombre (128) de ces formes est trop grand.

Il est aisé à comprendre que nous pouvons traiter la formule (IV) comme la plus générale et les formules (I), (II) et (III) comme ses formes particulières correspondantes aux valeurs consécutives:  $X=Y=B$ ;  $X=C$ ,  $Y=0$ ;  $X=1$ ,  $Y=D$ .

A la fin je puis offrir pour le „Formulaire“ de *M.* Peano les propositions exprimées par mes formules (I), (II), (III), (IV), (4), (5), (6), (7), (8), (9), (11) et (12).

## II.

### La loi de jonction des égalités logiques.

L'une des particularités remarquables de la Logique Mathématique consiste dans la possibilité de remplacer chaque système donné des égalités par une seule égalité équivalente à ce système. Pour effectuer cette transformation importante nous n'avons à présent que deux méthodes spéciales. Ici je veux offrir pour ce but la méthode générale qui embrasse les deux méthodes mentionnées et en outre une infinité d'autres méthodes partielles.

La première des deux méthodes connues consiste en ce qui suit. On sait que chaque égalité  $A=B$  est équivalente à

l'égalité  $0=AB_0+A_0B$  et que chaque système de la sorte  $0=P', 0=P'', 0=P''', \dots$  est équivalent à une seule égalité  $0=P'+P''+P'''+\dots$ . Donc chaque système donné

$$A'=B', A''=B'', A'''=B''', \dots \quad (1)$$

doit être équivalent au système:

$$0=A'B'_0+A'_0B', \quad 0=A''B''_0+A''_0B'', \quad 0=A'''B'''_0+A'''_0B''',$$

et par conséquent aussi à l'égalité seule:

$$0=(A'B'_0+A'_0B')+(A''B''_0+A''_0B'')+(A'''B'''_0+A'''_0B'''). \quad (2)$$

Si nous posons pour abrégé:

$$\begin{aligned} A'B'_0+A'_0B' &= N', & A''B''_0+A''_0B'' &= N'', \\ A'''B'''_0+A'''_0B''' &= N''', & \dots & \dots \end{aligned} \quad (3)$$

et aussi

$$N'+N''+N'''+\dots = N, \quad \dots \quad (4)$$

nous aurons la formule

$$A'=B', A''=B'', A'''=B''', \dots )=(0=N), \dots \quad (5)$$

qui présente la première résolution partielle de la question (discutée).

Passons à la seconde de deux méthodes mentionnées. On sait que chaque égalité  $A=B$  est équivalente à l'égalité  $1=AB+A_0B_0$  et que chaque système de la sorte  $1=Q', 1=Q'', 1=Q''', \dots$  est équivalent à une seule égalité  $1=Q'Q''Q'''. \dots$ . Donc chaque système donné général:

$$A'=B', A''=B'', A'''=B''', \dots$$

doit être équivalent au système:





$$1=A'B'+A_0'B_0', \quad 1=A''B''+A_0''B_0'', \quad 1=A'''B''' + A_0'''B_0'''\dots$$

et par conséquent aussi à l'égalité seule:

$$1=(A'B'+A_0'B_0')(A''B''+A_0''B_0'')(A'''B''' + A_0'''B_0''')\dots(6)$$

Si nous posons pour abréger:

$$\begin{aligned} A'B'+A_0'B_0' &= M, & A''B''+A_0''B_0'' &= M', \\ A'''B''' + A_0'''B_0''' &= M'', & \dots\dots\dots & \end{aligned} \quad (7)$$

et aussi:

$$M M' M'' \dots = M, \dots\dots\dots : \dots \quad (8)$$

nous aurons la formule:

$$(A'=B', \quad A''=B'', \quad A'''=B''', \quad \dots) = (1=M) \dots \quad (9)$$

qui présente la seconde résolution partielle connue de la question discutée.

Il est aisé à voir que 1° les fonctions  $N$  et  $M$  sont les négations mutuelles, c'est à dire que

$$M=N_0, \quad N=M_0$$

et que 2° les deux égalités trouvées plus haut  $0=N$  et  $1=M$  se déduisent l'une de l'autre à l'aide de la règle  $(A=B) = (A_0=B_0)$ .

Avant de donner la méthode générale pour la jonction des égalités, il est nécessaire de faire ressouvenir la loi des formes des égalités, c'est à dire la formule:

$$(A=B) = [U = U(AB + A_0B_0) + U_0(AB_0 + A_0B)], \dots (10)$$

où  $U$  est une fonction tout à fait arbitraire. Puis il faut encore démontrer le théorème:

$$(A=AB'+A_0C', A=AB'+A_0C'')=[A=AB'B'+A_0(C'+C'')]. \dots \dots \dots (11)$$

exprimant la règle de jonction des deux déterminations générales de la même classe  $A$ . La démonstration de ce théorème est très simple. En effet, l'application de la règle générale  $(A=B)=(0=AB_0+A_0B)$  au cas de l'égalité  $X=XY+X_0Z$  nous donne la règle spéciale

$$(X=XY+X_0Z)=(0=XY_0+X_0Z)$$

dont l'application aux trois égalités qui figurent dans la formule (11) nous fournit:

$$\begin{aligned} (A=AB'+A_0C') &= (0=AB'_0+A_0C'), \\ (A=AB'+A_0C'') &= (0=AB''_0+A_0C''), \\ [A=AB'B'+A_0(C'+C'')] &= [0=A(B'_0+B''_0)+ \\ &\quad +A_0(C'+C'')], \end{aligned}$$

d'où à l'aide de la formule  $(0=P', 0=P'')=(0=P'+P'')$  nous concluons que le théorème est vrai. Il est facile de généraliser ce théorème au cas des trois (ou plus) déterminations données. Et nous recevons la règle suivante: pour joindre quelques déterminations de la même classe  $A$ , il faut multiplier les coefficients du symbole  $A$  et additionner les coefficients du symbole  $A_0$ .

Pour les valeurs spéciales  $A=0$  et  $A=1$  nous recevons de la formule générale (11) les formules partielles connues:

$$(0=C', 0=C'', \dots)=(0=C'+C''+\dots), (1=B', 1=B'', \dots)= \\ = (1=B'B'' \dots).$$

Il est clair à présent que la méthode générale de jonction des égalités doit se fonder sur les formules (10) et (11).

C'est à dire que pour joindre les égalités données il suffit: 1° transformer toutes les égalités dans la forme de détermination de la même fonction  $U$  prise à volonté et 2° unir toutes les déterminations obtenues de la classe  $U$  en sa seule détermination. Pour exprimer cette règle on a la formule:

$$(A'=B', A''=B'', \dots)=[U=U(A'B'+A_0B_0')(A''B''+ \\ +A_0''B_0''). \dots + U_0(A'B_0'+A_0'B'+A_0''B''+A''B_0''+\dots)]$$

ou à l'aide de notations (3), (4), (7) et (8):

$$(A'=B', A''=B'', A'''=B''', \dots)=(U=UM+U_0N). \quad (12)$$

Nous pouvons nommer cette formule (12) la loi de jonction des égalités logiques. Pour les valeurs  $U=0$  et  $U=1$  elle nous donne les deux formules partielles connues (5) et (9). Pour toutes les autres valeurs de la classe arbitraire  $U$  dont le nombre est infini elle se transforme en une infinité d'autres formules partielles servant au même but.

En usant les termes proposés dans mon article premier, les formules (5), (4), (9) et (8) nous montrent: 1° que la classe  $N$  est le complet rien (ou zéro) logique du système donné (1) et en même temps c'est la somme des complets zéros logiques des toutes les égalités de ce système et 2° que la fonction  $M$  étant le complet tout logique du même système est aussi le produit des unités complètes logiques des toutes ses égalités. Donc nous pouvons énoncer ainsi la loi exprimée par la formule (12): tout le contenu logique de chaque système donné est équivalent à l'assertion que chaque classe prise à volonté est contenue dans le complet tout logique de ce système et contient son complet logique rien. On peut aussi dire que pour tirer de chaque système donné la détermina-



tion complète de chaque fonction donnée, il suffit d'exprimer que cette fonction est contenue dans le complet tout logique de ce système et contient son complet logique rien.

Il est évident que la formule (10) est l'un des cas particuliers de la formule (12). Donc la loi de jonction ci-dessus est la généralisation de la loi des formes proposée dans mon article précédent.

Les formules nouvelles (11) et (12) conviennent au „Formulaire“ de M. Peano.

Exemple. Soit donné pour la jonction le système de deux égalités:

$$a = a(bc_0 + b_0c), \quad b = ab.$$

Nous aurons:

$$\begin{aligned} A' &= a, \quad B' = a(bc_0 + b_0c), \quad A'' = b, \quad B'' = ab; \\ N' &= A'B'_0 + A'_0B' = a(bc + b_0c_0), \quad N'' = A''B''_0 + A''_0B'' = a_0b; \\ N &= N' + N'' = a(bc + b_0c_0) + a_0b, \quad M = N_0 = a(bc_0 + b_0c) + a_0b_0. \end{aligned}$$

Donc toutes les formes d'une égalité séparée équivalente au système donné seront renfermées dans le schème:

$$U = UM + U_0N = U[a(bc_0 + b_0c) + a_0b_0] + U_0[a(bc + b_0c_0) + a_0b].$$

L'une des 128 formes principales et totalement distinctes de cette égalité, la forme correspondante à la valeur  $U=b$ , sera:

$$b = abc_0 + ab_0c_0 = ac_0.$$

D'où nous concluons que

$$[a = a(bc_0 + b_0c), \quad b = ab] = (b = ac_0).$$

### III.

#### La loi de décomposition des égalités logiques en ses éléments.

Dans deux articles précédents j'ai démontré: 1<sup>o</sup> que nous pouvons convertir chaque égalité logique isolée en forme de détermination de chaque fonction prise à volonté et 2<sup>o</sup> que nous pouvons remplacer chaque système des égalités logiques par une seule égalité et cela par une infinité des manières. Le but de cet article est de donner les règles pour convertir chaque égalité logique isolée en systèmes généralement et en le système de ses éléments en particulier.

Mais préalablement il faut construire les règles pour décomposer les classes car la décomposition des égalités ne peut être basée que sur la décomposition des classes.

Convenons de dire que chaque classe qui est contenue dans  $A$  est l'une de ses sous-classes de  $A$  et que chaque classe qui contient  $A$  est l'une de ses superclasses. Après cela, si la classe  $A$  est transformée en une somme des classes, nous pouvons dire que  $A$  est décomposée en ses sous-classes et si la classe  $A$  est transformée en un produit des classes, nous pouvons dire qu'elle est décomposée en ses superclasses.

A l'exception des classes élémentaires, toutes les autres classes sont susceptibles de cette double décomposition: en sous-classes et en superclasses.

Les formules connues:

$$a(b+c)=ab+ac, (a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd,...$$

$$a+bc=(a+b)(a+c), ab+cd=(a+c)(a+d)(b+c)(b+d),....$$

nous montrent qu'en Logique la multiplication et l'addition sont les deux opérations l'une desquelles est distributive en-

vers l'autre. D'où il suit que pour décomposer la classe en ses subclasses il faut effectuer les multiplications et pour la décomposer en superclasses il suffit d'effectuer les additions. Par exemple la classe  $a+b(c_0+d)$  se décompose: 1° après la multiplication effectuée dans la somme de ses subclasses  $a+bc_0+bd$  et 2° après l'addition effectuée dans le produit de ses superclasses  $(a+b)(a+c_0+d)$ .

Si les classes données pour la décomposition sont construites à l'aide de  $n$  lettres  $a, b, c, d, \dots$  nous pouvons dire que toutes ces classes appartiennent au monde du discours de ces  $n$  lettres. Le nombre total des classes appartenantes à ce monde est  $2^{2^n}$ ; le nombre de ses classes simples est  $2n$ , ce sont:  $a, a_0, b, b_0, c, c_0, \dots$ ; enfin le nombre de ses éléments de volume, ainsi que le nombre de ses éléments de contenu, est  $2^n$ . L'un de ses éléments de la première sorte est le produit de toutes ses  $n$  lettres qui est  $abcd\dots$ . Tous les autres éléments de la même sorte s'obtiennent de ce produit en attribuant le signe<sub>0</sub> consécutivement à l'un de ses facteurs, à deux, à trois et ainsi de suite. L'un des éléments de contenu est la somme de toutes  $n$  lettres du discours, c'est à dire  $a+b+c+d+\dots$ . Tous les autres éléments de cette sorte s'obtiennent de cette somme en attribuant le signe<sub>0</sub> consécutivement à l'un des ses membres, à deux, à trois et ainsi de suite. Par exemple au monde du discours de deux lettres  $a$  et  $b$  appartiennent entre autres: 1° les quatre classes simples  $a, b, a_0, b_0$ ; 2° les quatre éléments de volume  $ab, ab_0, a_0b, a_0b_0$  et 3° les quatre éléments de contenu  $a+b, a+b_0, a_0+b, a_0+b_0$ . Les quatre classes restantes de ce monde sont: 0, 1,  $ab+a_0b_0, ab_0+a_0b$ .

Pour plus de précision et de simplicité nous nommerons les éléments de volume et les éléments de contenu par termes



suivants: les minimaux du discours et les maximaux du discours.

On sait que chaque produit des classes simples est un monôme. Pareillement nous nommerons chaque somme des classes simples un monofacteur. Ainsi on peut dire que les minimaux du discours de  $n$  lettres sont les monômes ayant  $n$  facteurs et que ses maximaux sont les monofacteurs ayant  $n$  membres.

Les minimaux sont les seules classes du discours qui n'ont pas de subclasses (autre le zéro) et les maximaux sont les seules classes du discours qui n'ont pas de superclasses (autre l'unité).

Pour décomposer en minimaux de  $n$  lettres un monôme ayant  $n-i$  facteurs il faut le multiplier par le produit de  $i$  binômes de la forme  $q+q_0$  composés à l'aide de toutes les lettres qui manquent à ce monôme, après quoi le monôme donné se transforme en somme des minimaux en nombre  $2^i$ . Pour décomposer en maximaux de  $n$  lettres un monofacteur ayant  $n-k$  membres il faut l'additionner avec  $k$  bifacteurs de la forme  $qq_0$  composés à l'aide de toutes les lettres qui manquent à ce monofacteur et effectuer toutes les additions, après quoi le monofacteur donné se transforme dans le produit des  $2^k$  maximaux. Pour décomposer en minimaux un pur polynôme il faut décomposer en minimaux chacun de ses membres (monômes) séparément et rejeter toutes les réitérations de chacun des minimaux. Pour décomposer en maximaux un pur polyfacteur il faut décomposer en maximaux chacun de ses facteurs (monofacteurs) séparément et rejeter toutes les réitérations de chacun des maximaux. Enfin pour réduire la classe donnée à la forme de pur polynôme ou de pur polyfacteur il suffit d'effectuer dans son expression toutes les multiplications ou toutes les additions.

Décomposons par exemple la classe  $a(b+c)+bc$  en minimaux et en maximaux du discours de quatre lettres  $a, b, c, d$ . Nous aurons:

$$\begin{aligned} 1^0, \quad a(b+c)+bc &= ab+ac+bc = ab(c+c_0)(d+d_0)+ac(b+b_0) \\ & \quad (d+d_0)+bc(a+a_0)(d+d_0) = abcd+abcd_0+abc_0d+abc_0d_0+ \\ & \quad +abcd+abcd_0+ab_0cd+ab_0cd_0+abcd+abcd_0+a_0bcd+a_0bcd_0= \\ & \quad abcd+abcd_0+abc_0d+abc_0d_0+ab_0cd+ab_0cd_0+a_0bcd+a_0bcd_0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2^0, \quad a(b+c)+bc &= (a+b)(a+c)(b+c) = (a+b+cc_0+dd_0)(a+c+ \\ & \quad +bb_0+dd_0)(b+c+aa_0+dd_0) = (a+b+c+d)(a+b+c+d_0) \\ & \quad (a+b+c_0+d)(a+b+c_0+d_0)(a+b_0+c+d)(a+b_0+ \\ & \quad +c+d_0)(a_0+b+c+d)(a_0+b+c+d_0). \end{aligned}$$

On peut démontrer que pour chaque classe ses deux décompositions en les éléments de  $n$  lettres sont liées par cette règle: la somme de  $k$  minimaux est égale au produit de  $2^n - k$  maximaux qui sont les négations de tous les minimaux restants. D'où il suit que chaque classe du discours de  $n$  lettres doit avoir le nombre  $2^n$  des éléments de toutes les deux sortes, ainsi que si le nombre de ses minimaux est  $k$ , le nombre de ses maximaux doit être  $2^n - k$ . Par exemple la décomposition en minimaux de la classe  $ab_0+bc_0+a_0c$  étant  $ab_0c+ab_0c_0++abc_0+a_0bc_0+a_0bc+a_0b_0c$ , sa décomposition en maximaux doit être égale au produit des négations de deux minimaux absentes qui sont  $abc$  et  $a_0b_0c_0$ , et nous recevons pour la décomposition en maximaux de la même classe:  $ab_0+bc_0+a_0c = (a+b+c)(a_0+b_0+c_0)$ .

Revenons à la décomposition des égalités. Nous savons que chaque égalité peut être considérée comme la détermination de son membre gauche et que le plus général type de déterminations est  $A=AB+A_0C$ , où figurent à la fois les

trois classes: la classe à déterminer  $A$ , son superclasse  $B$  et son sous-classe  $C$ . Les trois autres types des égalités, nommément  $A=AX$ ,  $A=A+Y$ ,  $A=Z$  sont les types particuliers correspondants aux valeurs:  $B=X$ ,  $C=0$ ;  $B=1$ ,  $C=Y$ ;  $B=Z$ ,  $C=Z$ . Cela montre qu'il suffit d'avoir les règles de décomposition des égalités du type général  $A=AB+A_0C$ .

Dans mon article second est démontrée la formule

$$(A=AB' + A_0C', A=AB'' + A_0C'', \dots) = [A=AB'B'' \dots + A_0'(C' + C'' + \dots)]$$

qui exprime la règle de jonction des déterminations et peut aussi nous fournir la règle de décomposition des égalités. Pour cela il suffit d'écrire cette formule ainsi:

$$[A=AB'B''B''' \dots + A_0(C' + C'' + C''' + \dots)] = (A=AB', A=A+C', A=AB'', A=A+C'', A=AB''', A=A+C''', \dots),$$

d'où nous voyons que pour décomposer la détermination du type général  $A=AB+A_0C$  il faut décomposer son superclasse  $B$  en ses superclasses et son sous-classe  $C$  en ses sous-classes. Donc la loi de décomposition d'une égalité en ses éléments est telle: 1° pour décomposer l'égalité  $A=AB+A_0C$  il faut décomposer  $B$  en maximaux et  $C$  en minimaux; 2° pour décomposer l'égalité  $A=AX$  il faut décomposer  $X$  en maximaux; 3° pour décomposer l'égalité  $A=A+Y$  il faut décomposer  $Y$  en minimaux; enfin 4° pour décomposer l'égalité  $A=Z$ , ou, ce qui est la même chose, l'égalité  $A=AZ+A_0Z$ , il faut décomposer  $Z$  en maximaux et en minimaux à la fois.

Il est clair que pour chaque égalité ayant la forme de détermination de  $A$  tous ses éléments ayant la même forme doivent être ou de la sorte  $A=AP$  ou de la sorte  $A=A+Q$ , où  $P$  est un des maximaux du discours et  $Q$  est un des ses minimaux.



Cherchons par exemple tous les éléments de l'égalité  $ac_0 = b$  appartenante au monde du discours de trois lettres  $a$ ,  $b$  et  $c$ . Avant tout il faut réduire cette égalité à la forme  $ac_0 = b[ac_0 + (ac_0)_0] = ac_0b + (a_0 + c)b$  et puis décomposer la classe  $b$  en minimaux et en maximaux. Nous aurons:

$$\begin{aligned} b &= b(a + a_0)(c + c_0) = abc + abc_0 + a_0bc + a_0bc_0, \\ b &= b + aa_0 + cc_0 = (a + b + c)(a + b + c_0)(a_0 + b + c)(a_0 + b + c_0), \\ ac_0 &= ac_0(a + b + c)(a + b + c_0)(a_0 + b + c)(a_0 + b + c_0) + (a_0 + c) \\ &\quad (abc + abc_0 + a_0bc + a_0bc_0). \end{aligned}$$

L'égalité donnée se décompose dans le système des éléments:

$$\begin{aligned} ac_0 &= ac_0(a + b + c) = ac_0, \quad ac_0 = ac_0(a + b + c_0) = ac_0, \\ ac_0 &= ac_0(a_0 + b + c), \quad ac_0 = ac_0(a_0 + b + c_0) = ac_0; \quad ac_0 = ac_0 + abc, \\ ac_0 &= ac_0 + abc_0 = ac_0, \quad ac_0 = ac_0 + a_0bc, \quad ac_0 = ac_0 + a_0bc_0. \end{aligned}$$

Mais quelquesunes de ces égalités sont les identités et doivent être rejetées, après quoi nous recevons le système de quatre éléments de l'égalité donnée:

$$\begin{aligned} ac_0 &= ac_0(a_0 + b + c), \quad ac_0 = ac_0 + abc, \quad ac_0 = ac_0 + a_0bc, \\ ac_0 &= ac_0 + a_0bc_0. \end{aligned}$$

Pour la preuve il suffit de joindre ces quatre égalités et nous aurons:

$$\begin{aligned} ac_0 &= ac_0(a_0 + b + c) + (a_0 + c)(abc + a_0bc + a_0bc_0) = \\ &= abc_0 + a_0bc + a_0bc_0 + abc = b. \end{aligned}$$

Pour convertir les éléments ayant la forme de détermination d'une fonction  $G$  en forme de détermination d'une autre fonction  $H$  il faut: 1° les convertir à l'aide des formules

$$(G=GX)=(0=GX_0), (G=G+Y)=(0=G_0Y)$$

en forme de détermination du zéro et 2° puis effectuer à l'aide de la formule

$$(0=N)=(H=HN_0+H_0N)$$

la conversion en forme désirable de détermination de la classe  $H$ . Par exemple pour réduire les quatre éléments de l'égalité  $b=ac_0$  trouvés plus haut à la forme de détermination de la classe simple  $b$  nous aurons d'abord:

$$0=ac_0ab_0c_0=ab_0c_0,$$

$$0=abc(a_0+c)=abc,$$

$$0=a_0bc(a_0+c)=a_0bc,$$

$$0=a_0bc_0(a_0+c)=a_0bc_0$$

et puis:

$$b=b(a_0+b+c)+b_0.ab_0c_0=b+ab_0c_0,$$

$$b=b(a_0+b_0+c_0)+b_0.abc=b(a_0+b_0+c_0),$$

$$b=b(a+b_0+c_0)+b_0.a_0bc=b(a+b_0+c_0),$$

$$b=b(a+b_0+c)+b_0.a_0bc_0=b(a+b_0+c).$$

Lorsque l'égalité donnée est décomposée en ses éléments, toutes les jonctions possibles de ces éléments nous fourniront tous les systèmes équivalents à cette égalité.

Pour décomposer en éléments un système il faut: ou décomposer chaque égalité séparément et rejeter toutes les réitérations des éléments, ou d'abord joindre les égalités en

une seule égalité et puis décomposer cette dernière. Pour épuiser tous les systèmes équivalents à un système donné il faut le décomposer en ses éléments et puis combiner ces éléments par toutes les manières possibles.

#### IV.

##### Sur le nombre des éléments des égalités logiques.

Nous savons que nous pouvons remplacer chaque égalité et chaque système des égalités par une seule égalité de la forme  $0=N$  (et d'une infinité d'autres formes). Donc tout ce que nous dirons ici d'une égalité  $0=N$  doit se rapporter en général à chaque problème logique exprimé par les égalités.

Nous savons aussi que les éléments de chaque égalité donnés en forme de détermination de la fonction quelconque  $U$  se partagent en deux groupes: les éléments de la sorte  $U=UX$  et les éléments de la sorte  $U=U+Y$ , où  $X$  est un des maximaux du discours et  $Y$  est un de ses minimaux. Posons que le nombre total des éléments de l'égalité donnée  $0=N$  est  $m$ , le nombre de ses éléments de la première sorte est  $s$  et par conséquent le nombre des éléments de la sorte  $U=U+Y$  est  $m-s$ . Le nombre  $m$  ne dépend que de la structure de la fonction  $N$ , mais le nombre  $s$  dépend en outre de la structure de la fonction prise pour  $U$ . Donc pour chaque égalité donnée  $0=N$  la distribution de ses  $m$  éléments entre les deux groupes mentionnées doit varier avec la variation de la fonction arbitraire  $U$ . Par exemple, les quatre éléments de l'égalité  $ac_0=b$  présentés en trois formes différentes sont (comme nous l'avons vu dans mon article III):

$$\begin{aligned} ac_0 &= ac_0(a_0 + b + c), \quad ac_0 = ac_0 + abc, \quad ac_0 = ac_0 + a_0bc, \quad ac_0 = ac_0 + a_0bc_0; \\ b &= b + ab_0c_0, \quad b = b(a_0 + b_0 + c_0), \quad b = b(a + b_0 + c_0), \quad b = b(a + b_0 + c); \\ 0 &= ab_0c_0, \quad 0 = abc, \quad 0 = a_0bc, \quad 0 = a_0bc_0. \end{aligned}$$

Ici pour  $U = ac_0$  nous avons un élément de la sorte  $U = UX$  et trois éléments de la sorte  $U = U + Y$ ; pour  $U = b$  les trois éléments sont de la première sorte et l'un de la seconde sorte; enfin pour  $U = 0$  tous les éléments sont de la sorte  $U = U + Y$ .

Revenons au cas général. Pour  $U = 0$  tous les égalités de la sorte  $U = UX$  sont les identités  $0 = 0$  et toutes les égalités de la sorte  $U = U + Y$  prennent la forme  $0 = Y$ , où  $Y$  est l'un des minimaux du discours. Cela désigne qu'en forme de détermination du zéro tous les  $m$  éléments de chaque problème exprimé par les égalités sont de la même sorte, nommément: l'un des minimaux du discours est égal à zéro. En d'autres termes: chaque problème  $N = 0$  ayant  $m$  éléments peut être représenté par une série de quelques  $m$  minimaux égalés à zéro. Évidemment ce sont tous les  $m$  minimaux de son complet zéro logique  $N$ . Pareillement en forme de détermination de l'unité tous les  $m$  éléments du problème  $0 = N$  doivent exprimer que quelques  $m$  maximaux du discours, les maximaux de la fonction  $N_0$ , sont égaux à l'unité.

Il est clair à présent que le nombre total  $m$  des éléments de chaque problème logique  $0 = N$  doit être égal au nombre des minimaux différents de la fonction  $N$  ou encore au nombre des maximaux différents de la fonction  $N_0 = M$ . Donc la recherche du nombre des éléments des égalités se réduit, comme il le fallait d'attendre, à la recherche du nombre des minimaux ou des maximaux des fonctions.

Mais dans ce dernier but il faut apprendre à réduire les fonctions à la forme de *polynôme disjonctif* et de *polyfacteur*



*disjonctif*. C'est de cette question que nous nous occuperons à présent.

La somme de deux classes  $A+B$  est disjonctive si la condition  $AB=0$  se vérifie identiquement. Dans ce cas les classes  $A$  et  $B$  n'ont pas des subclasses communes outre le zéro. Le produit de deux classes  $AB$  est disjonctif si la condition  $A+B=1$  est une identité. Dans ce cas les classes  $A$  et  $B$  n'ont pas des superclasses communes outre l'unité.

Disons à propos que si les deux conditions données plus haut coïncident, c'est à dire si les deux classes  $A$  et  $B$  satisfont identiquement aux conditions  $AB=0$ ,  $A+B=1$ , ces deux classes sont les négations mutuelles, n'ont ni subclasses, ni superclasses communes et sont disjonctives en tous les deux sens de ce mot.

Conformément à ce qui précède nous pouvons dire que le polynôme  $A+B+C+\dots$  est disjonctif si tous ses membres pris à deux donnent des binômes disjonctifs et que le polyfacteur  $ABC\dots$  est disjonctif si tous ses facteurs pris à deux donnent des bifacteurs disjonctifs.

Il est évident que la décomposition d'une somme disjonctive en ses subclasses (et en minimals) ne peut fournir aucunes réitérations des membres (et des minimals) et la décomposition d'un produit disjonctif en ses superclasses (et en maximaux) ne peut donner aucunes réitérations des facteurs (et des maximaux). Posons que  $n-i$ ,  $n-k$ ,  $n-l, \dots$  sont les nombres des facteurs dans les monômes consécutifs de la somme donnée disjonctive,  $n$  étant comme précédemment le nombre de toutes les lettres du discours. Alors le nombre total des minimals différents de la dite somme disjonctive doit être égal à la somme  $2^i + 2^k + 2^l + \dots$ . Pareillement si dans le polyfacteur donné disjonctif les ordres (les nombres des membres) de ses monofacteurs consécutifs sont  $i$ ,  $k$ ,  $l, \dots$ , le nombre total

des maximaux différents de ce polyfacteur doit s'égaliser à la somme  $2^{n-i} + 2^{n-k} + 2^{n-l} + \dots$

Il ne nous reste que d'apprendre les règles pour réduire chaque classe donnée à la forme de la somme disjonctive et du produit disjonctif.

Les identités suivantes:

$$\begin{aligned} A + B &= A + B(A + A_0) = (A + AB) + A_0B = A + A_0B, \\ A + B + C &= A + A_0(B + C) = A + A_0(B + B_0C) = A + A_0B + A_0B_0C, \\ A + B + C + D &= (A + B + C) + A_0B_0C_0D = A + A_0B + A_0B_0C + A_0B_0C_0D, \\ &\dots \end{aligned}$$

nous montrent que pour réduire la somme donnée à sa forme disjonctive il faut: le premier membre de la somme laisser invariable, le second multiplier par la négation du premier, le troisième multiplier par le produit des négations de deux premiers et ainsi de suite. Donc pour transformer chaque classe donnée en forme de la somme disjonctive il faut d'abord la réduire à la forme de pur polynôme, pour lequel but il suffit d'effectuer toutes les multiplications, et puis employer la règle ci-donnée.

D'un autre coté les identités:

$$\begin{aligned} AB &= A(B + AA_0) = A(B + A)(B + A_0) = A(A_0 + B), \\ ABC &= AB[(AB)_0 + C] = A(A_0 + B)(A_0 + B_0 + C), \\ ABCD &= ABC(A_0 + B_0 + C_0 + D) = \\ &= A(A_0 + B)(A_0 + B_0 + C)(A_0 + B_0 + C_0 + D), \\ &\dots \end{aligned}$$

nous montrent que pour réduire le produit donné à sa forme disjonctive il faut: le premier facteur du produit laisser invariable, au second ajouter la négation du premier, au troisième ajouter la somme des négations de deux premiers et ainsi de suite. Donc pour convertir chaque fonction donnée

en forme de produit disjonctif il faut d'abord la réduire à la forme de pur polyfacteur, pour lequel but il suffit d'effectuer toutes les additions, et puis employer la règle précédente.

*Exemple 1-er.* Trouver le nombre des éléments du problème exprimé par le système de deux égalités:

$$a = a(bc_0 + b_0c), \quad b = ab.$$

Nous aurons:

$$[a = a(bc_0 + b_0c)] = [0 = a(bc + b_0c_0)],$$

$$(b = ab) = (0 = a_0b),$$

$$[a = a(bc_0 + b_0c), b = ab] = [0 = a(bc + b_0c_0) + a_0b].$$

Ici la fonction  $N$  est égale au pur polynôme disjonctif  $abc + ab_0c_0 + a_0b$ . Donc le nombre total des éléments du problème est  $2^{3-3} + 2^{3-3} + 2^{3-2} = 4$ . Il est évident que ces éléments sont:

$$0 = abc, \quad 0 = ab_0c_0, \quad 0 = a_0bc, \quad 0 = a_0bc_0.$$

*Exemple 2.* Trouver le nombre des éléments du système:

$$1 = a + b, \quad 1 = b + c, \quad 1 = c + d.$$

Ce système est équivalent à l'égalité seule:

$$1 = (a + b)(b + c)(c + d),$$

où le membre droit est un produit qui n'est pas disjonctif. En le réduisant à sa forme disjonctive nous aurons:

$$\begin{aligned} 1 = (a + b)(b + c)(c + d) &= (a + b)(a_0b_0 + b + c)(a_0b_0 + b_0c_0 + c + d) = \\ &= (a + b)(a_0 + b + c)(b_0 + c + d). \end{aligned}$$

Donc le nombre total des éléments du système donné est égal à la somme:

$$2^{4-2} + 2^{4-3} + 2^{4-3} = 8.$$

Évidemment ces éléments sont:

$$1 = a + b + c + d, \quad 1 = a + b + c + d_0, \quad 1 = a + b + c_0 + d,$$

$$1 = a + b + c_0 + d_0,$$

$$1 = a_0 + b + c + d, \quad 1 = a_0 + b + c + d_0, \quad 1 = a + b_0 + c + d,$$

$$1 = a_0 + b_0 + c + d.$$

V.

**Sur le nombre des problèmes logiques exprimés par les égalités; le sommaire de tous les problèmes de deux lettres.**

Cherchons le nombre total des problèmes logiques différents exprimés par les égalités à l'aide de  $n$  lettres. Il peut sembler que ce nombre doit être infini. Mais cela n'est pas ainsi: ce nombre est fini et peut être calculé exactement.

Nous savons que: 1° chaque système des égalités peut être remplacé par une seule égalité, 2° chaque égalité séparée peut être convertie en forme de détermination de chaque fonction prise à volonté et 3° le nombre total des classes différentes qu'on peut construire à l'aide de  $n$  lettres est  $2^n$ . Supposons que l'une de ces classes est  $A$  et que chaque des problèmes possibles doit être représenté par une seule égalité ayant la forme de détermination de cette classe  $A$  nommément. Il est clair que nous épuiserons tous les problèmes en égalant  $A$  consécutivement à toutes les classes du discours. Vu que l'égalité  $A=A$  est une identité et l'égalité  $A=A_0$  est une absurdité, le nombre total des problèmes logiques différents exprimés à l'aide de  $n$  lettres doit être égal à  $2^n - 2$ .

Composons par exemple le sommaire de tous les 14 problèmes de deux lettres  $a$  et  $b$ . Vu que le monde du discours de ces deux lettres n'admet que ces 16 classes:

$$1, 0, a, a_0, b, b_0, ab, ab_0, a_0b, a_0b_0, a+b, a+b_0, a_0+b, a_0+b_0, ab+a_0b_0, ab_0+a_0b,$$

tous les 14 problèmes appartenants à ce monde et donnés en forme de détermination de  $a$  seront:

$$a=1, a=0, a=b, a=b_0, a=ab, a=ab_0, a=a_0b, a=a_0b_0, a=a+b, a=a+b_0, a=a_0+b, a=a_0+b_0, a=ab+a_0b_0, a=ab_0+a_0b.$$



Décomposés en éléments ces problèmes se partagent en les trois groupes:

1<sup>o</sup> les quatre problèmes avec un élément:

$$a=ab, a=ab_0, a=a+b=a+a_0b, a=a+b_0=a+a_0b_0;$$

2<sup>o</sup> les six problèmes avec deux éléments:

$$(a=1)=(a=a+b, a=a+b_0)=(a=a+a_0b, a=a+a_0b_0),$$

$$(a=0)=(a=ab, a=ab_0),$$

$$(a=b)=(a=ab, a=a+b)=(a=ab, a=a+a_0b),$$

$$(a=b_0)=(a=ab_0, a=a+b_0)=(a=ab_0, a=a+a_0b_0),$$

$$(a=ab+a_0b_0)=(a=ab, a=a+b_0)=(b=1),$$

$$(a=ab_0+a_0b)=(a=ab_0, a=a+b)=(b=0);$$

et 3<sup>o</sup> les quatre problèmes avec trois éléments:

$$(a=a_0b)=(a=ab, a=ab_0, a=a+b)=(a=0, b=0),$$

$$(a=a_0b_0)=(a=ab, a=ab_0, a=a+b_0)=(a=0, b=1),$$

$$(a=a_0+b)=(a=ab, a=a+b, a=a+b_0)=(a=1, b=1),$$

$$(a=a_0+b_0)=(a=ab_0, a=a+b, a=a+b_0)=(a=1, b=0).$$

Si nous ajouterons aux ces 14 problèmes une identité  $a=a$  que nous pouvons nommer le problème sans éléments et une absurdité  $a=a_0$  qui est le problème avec quatre éléments, car:

$$(a=a_0)=(a=ab, a=ab_0, a=a+b, a=a+b_0),$$

nous recevrons toutes les 16 égalités différentes que nous pouvons construire à l'aide de deux lettres  $a$  et  $b$ . Plus que quatre éléments ne peut avoir aucune des égalités appartenantes au monde du discours de deux lettres, parce que ce monde lui même n'a que quatre minimaux (et autant des maximaux).

## VI.

**La méthode générale pour construire les problèmes logiques à l'aide des égalités.**

En reproduisant dans son ouvrage capital un problème particulier donné par Miss Ladd, Schröder dit que ce problème



est le plus compliqué de tous les problèmes qui étaient construits et résolus en Logique jusqu'à présent \*). Cela nous montre que la méthode générale pour construire les problèmes logiques proposée par moi en 1884 \*\*) resta inconnue à ce logicien éminent. Pour cette cause je compte nécessaire d'exposer ici la méthode mentionnée.

Supposons que nous voulons construire un des problèmes ayant  $m$  éléments,  $p$  prémisses et  $n$  lettres. (Evidemment le nombre  $p$  ne doit pas surpasser le nombre  $m$  qui à son tour doit être plus petit que le nombre  $2^n$ .) Dans ce but prenons quelques  $m$  minimaux (ou maximaux) du discours de  $n$  lettres et égalons chacun d'eux au zéro (ou à l'unité). Puis il faut combiner ces  $m$  égalités élémentaires à l'aide des additions (ou des multiplications) ainsi que nous aurions exactement le nombre  $p$  des prémisses. Ensuite en laissant quelques de ces  $p$  égalités invariables nous pouvons convertir toutes les autres en forme des déterminations des classes diverses simples ou composées. Enfin il ne nous restera que de choisir pour toutes  $n$  lettres du discours quelques significations déterminées, après quoi l'un des problèmes satisfaisants aux toutes les conditions proposées sera composé.

Pour illustrer cette méthode je prends de mon livre un simple exemple. Composons l'un des problèmes avec 3 lettres, 2 prémisses et 4 éléments. Prennons à libre arbitre quelques 4 maximaux des trois lettres  $a, b, c$  et égalons chacun d'eux à l'unité. Nous aurons par exemple:

$$1 = a + b_0 + c, \quad 1 = a + b_0 + c_0,$$

$$1 = a_0 + b + c, \quad 1 = a_0 + b_0 + c_0.$$

Ce système des éléments présente l'un des problèmes cherchés. Il ne nous reste que le transformer en quelque sys-

---

\*) Schröder, Algebra der Logik, 1890, B. 1, S. 552.

\*\*) Voyez mon livre russe nommé plus haut, p. 167.

tème de deux égalités. Les multiplications nous donneront par exemple le système:

$$1 = (a + b_0 + c)(a + b_0 + c_0) = a + b_0 + cc_0 = a + b_0,$$

$$1 = (a_0 + b + c)(a_0 + b_0 + c_0) = a_0 + bc_0 + b_0c = a_0 + a(bc_0 + b_0c).$$

Les conversions de ces égalités nous fourniront par exemple:

$$b = bM' + b_0N' = b(a + b_0) + b_0a_0b = ab,$$

$$a = aM' + a_0N' = a[a_0 + a(bc_0 + b_0c)] + a_0[0a_0 + a(bc + b_0c)] = \\ = a(bc_0 + b_0c).$$

Par conséquent l'un des problèmes cherchés est tel:

$$a = a(bc_0 + b_0c), \quad b = ab. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Ce problème nous l'avons rencontré dans tous nos articles précédents. Pour lui communiquer quelque sens pratique supposons que  $a$  est la classe des membres du Conseil (d'un établissement financier),  $b$  est la classe des personnes qui possèdent les obligations et  $c$  est la classe des personnes qui possèdent les actions. Alors les deux prémisses composées plus haut (1) désignerons que: 1° les membres du Conseil sont les personnes qui possèdent ou les seules obligations, ou les seules actions et 2° tous les possesseurs des obligations appartiennent au Conseil. C'est un problème historique. Il était proposé par M. Venn à ses disciples pour démontrer avec évidence la nécessité pour la Logique des notations et des opérations symboliques.

A la fin de cet article je puis dire que j'ai donné dans mon livre un problème particulier ayant 14 prémisses et autant des éléments.

## VII.

### Essai de la classification des déterminations.

Chaque égalité logique  $A=B$  nous pouvons considérer à deux points de vue: 1° comme l'équivalence de ses deux mem-

bres  $A$  et  $B$  et  $2^0$  comme l'une des déterminations de son membre gauche  $A$ . Nous ne donnerons ici que la classification des égalités traitées comme déterminations des classes.

Nous savons que le plus général type des déterminations des classes est représenté par le schème  $A=AB+A_0C$ , où figurent à la fois les trois classes: la classe à déterminer  $A$ , son superclasse  $B$  et son sousclasse  $C$ . Vu que cette détermination est équivalente au système de deux déterminations hétérogènes:  $A=AB$ ,  $A=A+C=A+A_0C$  nous la nommerons *la détermination bipartible*.

Ainsi toutes les autres sortes des déterminations ne sont que les cas particuliers des déterminations bipartibles.

Pour la valeur  $C=0$  le schème général nous donne la détermination de la sorte  $A=AB$  où figurent la classe à déterminer  $A$  et son superclasse  $B$ . Cette détermination nous pouvons nommer *la détermination de subordination* de  $A$  à  $B$ .

Pour la valeur  $B=1$  nous recevons la détermination de la sorte  $A=A+A_0C=A+C$  où figurent la classe à déterminer  $A$  et son sousclasse  $C$ . Cette détermination nous nommerons *la détermination de supériorité* de  $A$  à  $C$ .

Pour la valeur  $B=C$  nous aurons la détermination du type  $A=B$  où figurent la classe à déterminer  $A$  et son équivalent  $B$ . Cette détermination nous pouvons nommer *la détermination de l'équivalence* de  $A$  à  $B$ .

Pour la valeur  $C=C+B$  nous recevons la détermination de la sorte  $A=AB+A_0(B+C)=B+A_0C$ . Cette détermination étant équivalente au système  $A=B$ ,  $A=A+C$ , nous pouvons la nommer *la détermination coéquivalente*.

Pour la valeur  $B=B+C$  nous avons la détermination du type  $A=A(B+C)+A_0C=C+AB$ . Ici la classe  $A$  est contenue en  $B+C$  et contient  $C$ . Donc  $A$  doit avoir une valeur intermédiaire entre  $C$  et  $C+B$ . Nous nommerons cette détermination *la détermination intermédiaire*.

Soit enfin  $B=C_0$ . Nous recevons la détermination de la sorte  $A=AB+A_0B_0$  (ou encore  $A=AC_0+A_0C$ ). Cette détermination est équivalente à l'égalité  $B_0=0$  ou, ce qui est la même chose, à l'égalité  $B=1$ . Ainsi la détermination de  $A$  donnée plus haut se réduit logiquement à une telle:  $A$  est contenue en une classe dont la valeur logique est l'unité et contient une autre classe dont la valeur logique est le zéro. Une telle détermination est trop vague et peut sembler fictive, imaginaire, inefficace. Est-ce vrai dans tous les cas? Notre réponse est que cela est vrai dans quelques cas particuliers, mais généralement la détermination de la sorte  $A=AB+A_0B_0$  n'est pas fictive. Il suffit de se ressouvenir que toutes les formes de l'égalité  $0=N$  (qui représente tous les problèmes exprimés à l'aide des égalités) se renferment en le schème  $U=UN_0+U_0N$  dont la vraie valeur est  $N=0$ . Néanmoins cette formule nous donne généralement les déterminations effectives. Nous pouvons affirmer que toutes les formes *principales* de l'égalité  $N=0$  sont toujours les déterminations effectives et toutes ses formes *secondaires* sont les déterminations imaginaires. Donc si dans l'expression de la classe  $A$  figurent quelques lettres étrangères à l'expression de  $B$ , la détermination  $A=AB+A_0B_0$  n'est pas efficace et peut être nommée *fictive*. Nous verrons dans la suite que le résultat de l'élimination d'une lettre quelconque  $x$  étant réduit à la forme de détermination de  $x$  ou de  $x_0$  est toujours la détermination fictive.

### VIII.

#### Sur les racines d'une détermination intermédiaire de la simple classe.

Nous savons que chaque problème logique exprimé à l'aide des égalités et appartenant au monde du discours de  $n$  lettres  $a, b, c, d, \dots$  peut nous fournir les *déterminations complètes* pour toutes ses  $2n$  simples classes qui sont  $a, a_0, b,$



$b_0, c, c_0, \dots$  (et pour toutes les fonctions possibles). Mais, outre des déterminations, toutes les classes simples doivent avoir encore des *racines*, et cela dans tous les problèmes logiques. En supposant que le problème donné est réduit à une seule égalité ayant la forme de détermination d'une de ses classes simples  $a$ , nous pouvons dire généralement que chaque détermination donnée de la classe simple  $a$  doit avoir des racines.

Nous ne parlerons ici que de racines des déterminations *intermédiaires* des classes simples.

Soit donnée une détermination intermédiaire de la simple classe  $a$ :

$$a = P + aQ, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

où  $P$  et  $Q$  sont les fonctions de  $n-1$  lettres restantes  $b, c, d, \dots$ . Convenons de dire que chaque fonction de ces  $n-1$  lettres  $f(b, c, d, \dots)$  qui étant substituée au lieu de  $a$  en égalité (1) la transforme en l'identité  $f=f$  doit se nommer *la racine* de  $a$  pour l'égalité donnée (1).

Cherchons le nombre et les valeurs de toutes les racines de  $a$  pour la détermination donnée intermédiaire (1).

Il est aisé à voir que deux des racines de  $a$  pour l'égalité (1) sont déjà connues, ce sont:  $a=P$  et  $a=P+Q$ . En effet, les substitutions de ces deux valeurs dans l'égalité (1) nous donnent des identités:

$$P = P + PQ = P, \quad P + Q = P + (P + Q)Q + P + Q.$$

Pour trouver les autres racines de  $a$  il suffit d'observer que nous pouvons écrire ainsi l'égalité donnée (1):

$$a = P + aQ = P(a + a_0) + aQ = a(P + Q) + a_0P.$$

D'où nous voyons que la classe  $a$  est égale à une fonction qui contient  $P$  et est contenue en  $P+Q$ . C'est à dire que chaque fonction prise pour  $a$  doit contenir tout  $P$  et la partie quelconque de  $Q$ . Par conséquent toutes les racines de  $a$  doivent se renfermer en le schème:

$$a = P + xQ, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

où  $x$  est une classe tout à fait arbitraire. D'un autre coté la substitution en l'égalité (1) de la valeur de  $a$  exprimée par la formule (2) nous donne l'identité:

$$P + xQ = P + (P + xQ)Q = P + PQ + xQ = P + xQ.$$

Donc: 1° toutes les racines de  $a$  pour l'égalité (1) doivent avoir la forme (2) et 2° toutes les valeurs de  $a$  tirées de la formule (2) sont les racines de  $a$  pour l'égalité (1).

Pour les valeurs  $x=0$  et  $x=1$  la formule (2) nous fournit les deux racines  $a=P$ ,  $a=P+Q$  que nous avons déjà données plus haut.

Quant au nombre des racines de  $a$  pour l'égalité donnée (1), il est clair que ce nombre doit être infini, car la fonction  $x$  qui figure dans la formule (2) est tout à fait arbitraire. Mais nous pouvons diviser toutes ces racines en deux groupes: 1° les racines *principales* qui ne sont exprimés qu'avec  $n-1$  lettres  $b, c, d, \dots$  sans l'aide des lettres étrangères à l'égalité donnée (1) et 2° les racines *secondaires* (ou imaginaires) dont les expressions renferment une ou plusieurs lettres étrangères  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  Pour avoir les racines principales il suffit de traiter la classe  $x$  qui figure dans la formule (2) comme une fonction de  $n-1$  lettres  $b, c, d, \dots$  seulement. Au contraire, toutes les valeurs de  $x$  exprimées à l'aide des lettres étrangères au discours ne nous donneront que des racines secondaires. Il est clair à présent que le nombre des racines principales doit être fini, tandis que le nombre des racines secondaires est infini.

Cherchons le nombre des racines principales que nous peut fournir la formule (2).

On sait que avec  $n-1$  lettres nous pouvons composer seulement le nombre  $2^{n-1}$  des classes diverses. Par conséquent le nombre des racines principales de  $a$  ne doit pas surpasser ce

nombre. Mais 1° beaucoup des valeurs différentes de  $x$  substituées dans la formule (2) ne nous donnent qu'une seule valeur de  $xQ$  et 2° beaucoup des valeurs différentes de  $xQ$  ne nous donnent qu'une seule valeur de la somme  $P+xQ$  qui est égale à  $a$ . Par exemple, 1° les valeurs  $x=1$ ,  $x=Q$ ,  $x=Q+y$  ne donnent qu'une seule valeur de  $xQ$  qui est égale à  $Q$  et 2° les valeurs  $xQ=Q$ ,  $xQ=P_0Q$ ,  $xQ=(P_0+Py)Q$  ne nous donnent qu'une seule valeur de  $a$  qui est  $P+Q$ . Pour ces deux raisons le nombre des racines principales de  $a$  doit être sensiblement plus petit que le nombre  $2^{n-1}$ .

Si nous réduisons la somme  $P+xQ$  à sa forme disjunctive qui est  $P+xP_0Q$ , la formule des racines de  $a$  devient:

$$a=P+xP_0Q \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Ici aux valeurs différentes du second terme de la somme correspondent inmanquablement les valeurs différentes de la somme même, mais, comme précédemment, beaucoup des valeurs différentes de  $x$  ne nous donneront qu'une seule valeur de ce second terme et par conséquent de l'expression de  $a$ .

Évidemment, pour toutes les  $2^{n-1}$  valeurs possibles de  $x$ , le produit  $xP_0Q$  ne peut nous fournir que toutes les subclasses possibles de la fonction  $P_0Q$ . Décomposons la classe  $P_0Q$  qui est aussi la fonction de  $n-1$  lettres  $b, c, d, \dots$  en les minimals composés de toutes ces  $n-1$  lettres. Alors, si le nombre des minimals différents de la classe  $P_0Q$  est  $i$ , le nombre total de toutes ses subclasses (y comptant aussi le zéro et la fonction  $P_0Q$  même) exprimées à l'aide des  $n-1$  lettres  $b, c, d, \dots$  seulement, doit être égal à  $2^i$ .

Par exemple, si le nombre  $i$  est égal à 3 et toutes les trois minimals de la classe  $P_0Q$  sont  $e^{(1)}$ ,  $e^{(2)}$ ,  $e^{(3)}$ , alors toutes les 8 subclasses différentes de cette classe seront:

$$0, e^{(1)}, e^{(2)}, e^{(3)}, e^{(1)}+e^{(2)}, e^{(1)}+e^{(3)}, e^{(2)}+e^{(3)}, e^{(1)}+e^{(2)}+e^{(3)}.$$

Si nous désignons par le symbole  $\Sigma(P_0Q)$  une des subclasses de la fonction  $P_0Q$  ou, ce qui est la même chose, la somme de quelques des ses minimalis, la formule (3) devient:

$$a=P+\Sigma(P_0Q) \dots \dots \dots (4)$$

Cette formule (4) embrasse toutes les racines de  $a$  pour l'égalité donnée (1). Toutes ces racines sont inégales les uns aux autres, parce que toutes les valeurs du symbole  $\Sigma(P_0Q)$  sont différentes. Le nombre total de ces racines est  $2^i$ ,  $i$  étant le nombre des minimalis divers de la fonction  $P_0Q$ . Toutes ces  $2^i$  racines s'obtiennent en ajoutant à la même fonction  $P$  toutes les sommes des minimalis de la fonction  $P_0Q$ .

Pour donner un exemple, trouvons toutes les racines de  $d$  pour la détermination intermédiaire:

$$d=ab+d(ab_0c+a_0b).$$

Nous avons:

$$P=ab, Q=ab_0c+a_0b, P_0Q=(a_0+b_0)(ab_0c+a_0b)=ab_0c+a_0b.$$

La fonction  $P_0Q$  a les trois minimalis:  $ab_0c$ ,  $a_0bc$ ,  $a_0bc_0$ . Donc toutes les huit racines de  $d$  seront:

$$\begin{aligned} d^{(1)} &= ab + 0 = ab, & d^{(5)} &= ab + ab_0c + a_0bc = ab + ac + bc, \\ d^{(2)} &= ab + ab_0c = a(b+c), & d^{(6)} &= ab + ab_0c + a_0bc_0 = ab + ac + bc_0, \\ d^{(3)} &= ab + a_0bc = b(a+c), & d^{(7)} &= ab + a_0bc + a_0bc_0 = ab + a_0b = b, \\ d^{(4)} &= ab + a_0bc_0 = b(a+c_0), & d^{(8)} &= ab + ab_0c + a_0bc + a_0bc_0 = \\ & & &= b + ab_0c = b + ac. \end{aligned}$$

Les substitutions consécutives de ces valeurs dans la détermination donnée nous donneront des identités:

- 1)  $ab=ab+ab(ab_0c+a_0b)=ab,$
- 2)  $ab+ac=ab+(ab+ac)(ab_0c+a_0b)=ab+ab_0c=a(b+c)=ab+ac,$
- 3)  $ab+bc=ab+(ab+bc)(ab_0c+a_0b)=ab+a_0bc=b(a+c)=ab+bc,$

$$4) \quad ab + bc_0 = ab + (ab + bc_0)(ab_0c + a_0b) = ab + a_0bc_0 = b(a + c_0) = \\ = ab + bc_0,$$

$$5) \quad ab + ac + bc = ab + (ab + ac + bc)(ab_0c + a_0b) = ab + ab_0c + a_0bc = \\ = ab + ac + bc,$$

$$6) \quad ab + ac + bc_0 = ab + (ab + ac + bc_0)(ab_0c + a_0b) = ab + ab_0c + a_0bc_0 = \\ = ab + ac + bc_0,$$

$$7) \quad b = ab + b(ab_0c + a_0b) = ab + a_0b = b,$$

$$8) \quad b + ac = ab + (b + ac)(ab_0c + a_0b) = ab + a_0b + ab_0c = b + ab_0c = \\ = b + ac.$$

Revenons au cas général. Nous avons vu que le produit  $xP_0Q$  n'a que le nombre  $2^i$  des valeurs, tandis que le nombre des valeurs de la classe  $x$  est  $2^{n-1}$ . On peut démontrer directement que toutes les  $2^{n-1}$  valeurs de  $x$  se partagent en les  $2^i$  groupes ayant chacune le nombre  $2^{n-1-i}$  des classes différentes et que toutes les classes de la même groupe étant substituées au lieu de  $x$  dans le produit  $xP_0Q$  ne nous donnent qu'une seule valeur de ce produit. Pour cela il suffit d'expliquer que pour chaque valeur de la classe  $y$  le nombre des racines différentes de  $x$  pour l'égalité:

$$P_0Qx = P_0Qy. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

est égal à  $2^{n-1-i}$ . La transformation de cette égalité faite à l'aide de la formule générale:

$$(A=B) = (0=AB_0 + A_0B)$$

nous donne l'égalité:

$$0 = P_0Qx(F+Q_0+y_0) + (P+Q_0+x_0)P_0Qy = P_0Qy_0x + P_0Qyx_0, \quad . \quad . \quad (6)$$

qui se transforme à l'aide de la formule connue:

$$(0=Ax + Bx_0) = (x=A_0x + Bx_0)$$

dans l'égalité suivante:

$$x = (P+Q_0+y)x + P_0Qyx_0 = (P+P_0Q_0+P_0Qy)x + P_0Qyx_0 = \\ = P_0Qy(x+x_0) + (P+P_0Q_0)x = P_0Qy + x(P+Q_0) \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$



Or cette égalité dernière (7) est la détermination intermédiaire de  $x$  pour laquelle nous savons déjà le nombre et les valeurs de toutes ses racines. Nommément, vu que la somme  $P_0Qy + x(P+Q_0)$  est disjonctive, car le produit de deux fonctions  $P_0Qy$  et  $x(P+Q_0)$  est identiquement égal à zéro, nous pouvons dire que le nombre total des racines de  $x$  pour l'égalité (7) et par conséquent aussi pour l'égalité (5) est égal à  $2^k$ ,  $k$  étant le nombre des minimaux de la fonction  $P+Q_0$ . Il ne nous reste que d'exprimer le nombre  $k$  à l'aide du nombre  $i$  qui est le nombre des minimaux de la fonction  $P_0Q$ . Dans ce but il faut observer que les deux fonctions  $P+Q_0$  et  $P_0Q$  sont les négations mutuelles, d'où il suit que le nombre des minimaux de l'une d'elles est égal au nombre des maximaux de l'autre. Il faut aussi se ressouvenir que si le nombre des minimaux de la fonction de  $n-1$  lettres est  $h$ , le nombre de ses maximaux doit être égal à  $2^{n-1}-h$ . Après cela nous pouvons dire que: 1° le nombre des minimaux de  $P_0Q$  étant  $i$ , le nombre de ses maximaux est  $2^{n-1}-i$ , et 2° le nombre des minimaux de la somme  $P+Q_0$  qui est la négation de  $P_0Q$  est aussi égal à  $2^{n-1}-i$ . Mais nous avons désigné plus haut ce dernier nombre par la lettre  $k$ . Donc  $k=2^{n-1}-i$  et par conséquent le nombre total des racines de  $x$  pour l'égalité (5) qui est égal à  $2^k$  doit aussi être égal à  $2^{2^{n-1}-i}$ . La proposition que nous voulons de démontrer est justifiée.

Prenons à présent la *détermination de subordination* de la simple classe, par exemple  $a=aR$ , où  $R$  est la fonction de  $n-1$  lettres restantes  $b, c, d, \dots$ . Cette détermination nous la pouvons écrire ainsi:  $a=0+aR$ , c'est à dire la réduire à la forme de détermination intermédiaire. Voilà pourquoi nous pouvons dire que le nombre total des racines principales de la détermination de subordination  $a=aR$  est égal à  $2^r$ ,  $r$  étant le nombre des minimaux de la fonction  $R$ ; que toutes ces raci-

nes sont inégales les unes aux autres et que nous obtiendrons ses valeurs en égalant  $a$  aux toutes les sommes de quelques des minimaux mentionnés. Comme une de ces racines sert toujours la classe 0.

Trouvons par exemple les racines de la détermination de subordination  $a=a(b+c_0)$ . Vu que  $b+c_0=bc+bc_0+b_0c_0$ , toutes les huit racines de  $a$  seront:

$$0, bc, bc_0, b_0c_0, b, bc+b_0c_0, c_0, b+c_0.$$

Prenons encore la détermination de supériorité de la simple classe, par exemple  $a=a+S$ , où  $S$  est la fonction de  $n-1$  lettres  $b, c, d, \dots$  Pour la réduire à la forme de détermination intermédiaire il suffit de l'écrire ainsi:  $a=S+aS_0$ . D'où il suit que le nombre total des racines principales de la détermination de supériorité  $a=a+S$  est égal à  $2^s$ ,  $s$  étant le nombre des minimaux de la fonction  $S_0$  ou, ce qui est la même chose, le nombre des maximaux de la fonction  $S$ . Comme une de ces racines sert toujours la classe 1. Par exemple, toutes les huit racines de la détermination de supériorité  $a=a+bc=bc+a(b_0+c_0)=bc+a(bc_0+b_0c+b_0c_0)$  sont:

$$bc, b, c, b+c, b+c_0, b_0+c, bc+b_0c_0, 1.$$

Allons plus loin. Nous savons que toutes les déterminations élémentaires sont ou de la sorte  $U=Up$  ou de la sorte  $U=U+q$ , où  $p$  est l'un des maximaux du discours et  $q$  est l'un de ses minimaux. Donc les racines des déterminations élémentaires des simples classes se trouveront toujours d'après les règles données plus haut.

Ici il est nécessaire d'observer ce qui suit. Les racines des déterminations  $a=P+aP_0Q$ ,  $a=aR$  et  $a=a+S$  sont trouvées plus haut en supposition que les classes  $P_0Q$ ,  $R$  et  $S$  sont les fonctions de  $n-1$  lettres restantes  $b, c, d, \dots$  Mais dans les égalités élémentaires  $U=Up$ ,  $U=U+q$  les classes  $p$  et  $q$

sont le maximal et le minimal de toutes les  $n$  lettres du discours  $a, b, c, d, \dots$ . Donc, avant de chercher les racines des déterminations élémentaires des classes simples, par exemple  $a=ap$ ,  $a=a+q$ , il faut remplacer les classes  $p$  et  $q$  qui sont les fonctions de  $n$  lettres par quelques fonctions de  $n-1$  lettres  $b, c, d, \dots$ . Une telle transformation, étant impossible pour les égalités générales  $U=Up$ ,  $U=U+q$ , est toujours exécutable si  $U$  est l'une de classes simples, c'est à dire pour les éléments suivants  $a=ap$ ,  $a=a+q$ . Dans tels cas nous avons toujours  $p=a_0+p'$ ,  $q=a_0q'$  où  $p'$  et  $q'$  sont le maximal et le minimal de  $n-1$  lettres  $b, c, d, \dots$ ; et la transformation désirable se fait d'après les formules évidentes:

$$a=ap=a(a_0+p')=ap', \quad a=a+q=a+a_0q'=a+q'.$$

*Exemple 1.* Pour l'élément  $a=a(a_0+b+c_0)=a(b+c_0)$  les racines sont:

$$0, b, c_0, bc, bc_0, b_0c_0, bc+b_0c_0, b+c_0.$$

*Exemple 2.* Pour l'élément  $a=a+a_0b_0c=a+b_0c=b_0c+a(b+c_0)$  les racines sont:

$$b_0c, b_0, c, b+c, b_0+c, b_0+c_0, bc_0+b_0c, 1.$$

Démontrons que dans chaque problème de  $n$  lettres chaque détermination élémentaire de chaque classe simple doit avoir pour cette classe le nombre des racines principales égal à  $2^{n-1}$ .

Soit donnée d'abord la détermination élémentaire de la forme  $a=ap=0+ap$ , où  $p$  est l'un des maximaux composés des  $n-1$  lettres restantes  $b, c, d, \dots$ . Nous savons que chacun de ces maximaux est égal à la somme des  $2^{n-1}$  minimaux. Donc le nombre total des racines de la détermination élémentaire de la forme  $a=ap$  est égal à  $2^{n-1}$ .

Prenons à présent la détermination de la sorte  $a=a+q=q+aq_0$ , où  $q$  est l'un des minimaux composés de  $n-1$

lettres restantes  $b, c, d, \dots$  Ici de nouveau  $q_0$  est l'un des maximaux, d'où la conclusion est la même qu'en avant.

Par exemple, pour  $n=3$  le nombre  $2^{2^{n-1}}$  est égal à 8. Donc chacune de deux déterminations élémentaires  $a=a(b+c_0)$ ,  $a=a+b_0c$  doit avoir pour  $a$  le nombre huit des racines conformément à ce que nous avons déjà vu.

Il est facile à comprendre que pour chaque valeur donnée du nombre  $n$  les égalités élémentaires ont le plus grand nombre des racines.

Démontrons encore que les racines de chaque détermination intermédiaire sont les racines communes aux tous ses éléments. Nous savons que chaque racine d'une détermination intermédiaire satisfait à lui identiquement, c'est à dire la transforme en identité. Cette propriété de la racine doit persister pour toutes les formes possibles de la détermination donnée. D'où il suit que chaque racine doit satisfaire identiquement aux tous les éléments de cette détermination. Donc toutes les racines de chaque détermination intermédiaire sont les racines communes à tous ses éléments.

Pour illustrer cette vérité par un simple exemple prenons la détermination intermédiaire:

$$a=b+ac=(b+c)a+a_0b=b+ab_0c.$$

Cette détermination n'a que deux racines de  $a$  qui sont  $b$  et  $b+c$ . D'un autre coté ses trois éléments sont:

$$a=a(b+c), a=a+bc, a=a+bc_0.$$

Chacun de ces éléments a les huit racines, nommément:

- 1)  $0, b, c, bc, bc_0, b_0c, bc_0+b_0c, b+c$ ;
- 2)  $bc, b, c, b+c, b+c_0, b_0+c, bc+b_0c_0, 1$ ;
- 3)  $bc_0, b, c_0, b+c_0, c+b, b_0+c_0, bc_0+b_0c, 1$ .

Les racines communes à tous ces trois éléments sont

évidemment  $b$  et  $b+c$ , c'est à dire les mêmes que pour la détermination donnée. Ces deux racines satisfont identiquement à la détermination donnée et à chacun de ses éléments.

Démontrons encore que si la détermination de la simple classe  $a$  est intermédiaire, la détermination de sa négation  $a_0$  doit être aussi intermédiaire. En effet, d'après la formule connue  $(A=B)=(A_0=B_0)$ , nous avons:

$$\begin{aligned} (a=P+aP_0Q) &= \\ = [a_0=P_0(a_0+P+Q_0) &= P_0(a_0+Q_0) = P_0Q_0 + a_0P_0Q]. \end{aligned} \quad (8)$$

Cette formule démontre la proposition.

La même formule (8) nous montre aussi que les nombres des racines de  $a$  et de  $a_0$  doivent être égaux l'un à l'autre, car la même fonction  $P_0Q$  détermine les nombres des racines pour les deux formules équivalentes:

$$a=P+aP_0Q, \quad a_0=P_0Q_0+a_0P_0Q.$$

Enfin la même formule (8) nous montre que les racines de  $a$  et de  $a_0$  sont les négations mutuelles, car les deux fonctions  $P+aP_0Q$  et  $P_0Q_0+a_0P_0Q$  sont les négations mutuelles.

*Exemple.* Nous avons vu que la détermination intermédiaire

$$d=ab+d(ab_0c+a_0b). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

donne pour  $d$  ces huit racines:

$$\begin{aligned} &ab; a(b+c); b(a+c); b(a+c_0); \\ &ab+ac+bc; ab+ac+bc_0; b; b+ac \quad . \quad . \quad . \quad (10) \end{aligned}$$

Mais la formule (9) est équivalente à la détermination intermédiaire

$$d_0=b_0(a_0+c_0)+d_0(ab_0c+a_0b)$$

qui nous donne pour  $d_0$  d'après la méthode générale les huit racines:



$$\begin{aligned} & b_0(a_0 + c_0); \quad b_0; \quad a_0c + b_0c_0; \quad b_0(a_0 + c_0) + a_0bc_0; \\ & b_0 + a_0c; \quad b_0 + a_0c_0; \quad a_0 + b_0c_0; \quad b_0 + a_0. \quad \dots \quad (11) \end{aligned}$$

Il est facile à voir que toutes les racines de  $d_0$  sont les négations des racines de  $d$ . Donc nous pouvons dire que la détermination (9) nous donne les huit racines (10) de  $d$  et les huit racines (11) de  $d_0$  et que nous pouvons déduire les racines de  $d_0$  de celles de  $d$  à aide de l'opération de négation.

Nous avons trouvé plus haut que le nombre des racines de  $a$  pour la détermination générale intermédiaire  $a = P + aP_0Q$  est égal à  $2^i$ ,  $i$  étant le nombre des minimaux de la fonction  $P_0Q$ . En supposant que le nombre des éléments de la détermination donnée est  $m$ , démontrons que  $m + i = 2^{n-1}$  et par conséquent nous pouvons représenter le nombre  $2^i$  qui est le nombre total des racines de  $a$  par  $2^{2^{n-1}-m}$ . Pour démontrer, cela posons que le nombre des minimaux de la fonction  $P$  est  $k$ . Alors la somme  $P + Q$  qui est égale à la somme  $P + P_0Q$  doit avoir le nombre  $k + i$  des minimaux et par conséquent le nombre  $2^{n-1} - (k + i)$  des maximaux. En réduisant la détermination donnée  $a = P + aF_0Q$  à la forme  $a = a(P + P_0Q) + a_0P$ , nous voyons que cette détermination doit avoir le nombre  $2^{n-1} - (k + i)$  des éléments de la sorte  $U = Up$  et le nombre  $k$  des éléments de la sorte  $U = U + q$ . Donc le nombre total des éléments de cette détermination, étant égal à  $m$ , doit s'égaliser aussi à la somme  $2^{n-1} - (k + i) + k = 2^{n-1} - i$ , ce qui démontre la proposition.

Pour finir cet article comparons les deux formules

$$a = P + aQ, \quad a = P + xQ$$

relativement au volume de leur contenu logique. Ici la première formule est la détermination intermédiaire et la seconde est la formule générale de ses racines. La transformation de

ces deux égalités faite à l'aide de la règle  $(A=B)=(0=AB_0 + A_0B)$  nous donnera:

$$(a=P+aQ)=[0=aP_0(a_0+Q_0)+a_0(P+aQ)]= \\ = (0=aP_0Q_0+a_0P),$$

$$(a=P+xQ)=[0=aP_0(x_0+Q_0)+a_0(P+xQ)]= \\ = [0=aP_0Q_0+a_0P+P_0Q(ax_0+a_0x)].$$

D'où nous voyons que

$$(a=P+xQ)=[a=P+aQ, 0=P_0Q(ax_0+a_0x)].$$

Cela nous montre que la formule des racines pour chaque détermination intermédiaire embrasse toutes les connaissances exprimées par cette détermination avec un excès qui est différent pour les racines diverses.

Pour illustrer cette vérité prenons un simple exemple. La détermination intermédiaire  $a=b+ac$  n'a que deux racines:  $a=b$ ,  $a=b+c$ . Ces trois formules, nous pouvons les transformer ainsi:

$$(a=b+ac)=(0=ab_0c_0+a_0b),$$

$$(a=b)=(0=ab_0+a_0b)=(a=b+ac, 0=ab_0c),$$

$$(a=b+c)=(0=ab_0c_0+a_0b+a_0c)=(a=b+ac, 0=a_0c).$$

Donc, les formules des racines  $a=b$ ,  $a=b+c$  embrassent toutes les connaissances de la détermination  $a=b+ac$  avec les excès qui sont:  $0=ab_0c$  et  $0=a_0c$ , ou encore:  $a=a(b+c_0)$  et  $a=a+c$ .

Résumons tout ce qui est démontré dans cet article.—1°. Chaque détermination intermédiaire (et en particulier chaque détermination de supériorité, chaque détermination de subordination et chaque détermination élémentaire) de la chaque simple classe  $a$  doit avoir toujours les racines de cette classe.—2°. La racine d'une détermination intermédiaire est une fonction qui lui satisfait identiquement.—3°. Le nombre des racines

principales est toujours égal à  $2^{n-1-m}$ , où  $n$  est le nombre de toutes les lettres de la détermination donnée,  $m$  est le nombre de tous ses éléments.—4°. Les racines des classes opposées  $a$  et  $a_0$  existent en nombres égaux et sont les négations mutuelles.—5°. La formule de chaque racine embrasse toutes les connaissances de la détermination donnée avec un quelque excès.—6°. Le nombre des racines secondaires est toujours infini.

### IX.

#### La loi des racines des égalités logiques.

Soit donnée une égalité logique générale:

$$N(a, b, c, d, \dots) = 0. \quad (1)$$

contenant  $n$  lettres  $a, b, c, d, \dots$  et représentant chaque problème logique exprimé à l'aide des égalités. Nous pouvons résoudre cette égalité relativement à chacune de ses  $2n$  simples classes  $a, a_0, b, b_0, c, c_0, \dots$ . Pour la résoudre relativement à  $a$  ou  $a_0$ , nous commençons par la réduire à la forme suivante:

$$Ga + Ha_0 = 0, \quad (2)$$

où  $G$  et  $H$  sont les fonctions de  $n-1$  lettres restantes  $b, c, d, \dots$

Il faut expliquer que la réduction de l'égalité (1) à sa forme (2) se fait ainsi. En supposant que

$$N = Ra + Sa_0 + T,$$

où  $R, S$  et  $T$  sont les fonctions de  $n-1$  lettres  $b, c, d, \dots$  nous pouvons écrire:

$$\begin{aligned} N &= N(a + a_0) = a(Ra + Sa_0 + T) + a_0(Ra + Sa_0 + T) = \\ &= aR + aT + a_0S + a_0T = a(R + T) + a_0(S + T). \end{aligned}$$

Donc, si nous posons pour abrégé:

$$R + T = G, \quad S + T = H,$$

la réduction de l'égalité (1) à sa forme (2) sera effectuée à l'aide de la simple multiplication de  $N$  par la somme  $a + a_0$ .

L'égalité (2) qui remplace totalement l'égalité donnée (1) peut nous présenter les deux cas: 1° le cas particulier où le produit  $GH$  des coefficients  $G$  et  $H$  est égal identiquement à zéro et 2° le cas général où cette condition peut être ou satisfaite, ou non.

Discutons le premier de ces deux cas. La formule connue

$$(GH=0)=(G=GH_0)=(H=G_0H)$$

nous montre que l'égalité  $GH=0$  est une identité si l'un de deux coefficients  $G$  et  $H$  est contenu dans la négation de l'autre. En effet, si l'égalité donnée (1) ou (2) est de la sorte  $0=Ka+K_0La_0$  ou de la sorte  $0=EFa+E_0a_0$ , le produit des coefficients de  $a$  et de  $a_0$  est égal à zéro identiquement. Mais les transformations suivantes

$$\begin{aligned}(0=Ka+K_0La_0) &= (a=aK_0+a_0K_0L=K_0L+aK_0L_0), \\ (0=EFa+E_0a_0) &= [a=a(E_0+F_0)+a_0E_0=E_0+aF_0]\end{aligned}$$

nous persuadent qu'en ces deux cas la détermination complète de  $a$  tirée de l'égalité donnée doit être intermédiaire.

D'un autre côté la formule vraie

$$(a=P+aQ)=(0=aP_0Q_0+a_0F)$$

nous montre que chaque détermination intermédiaire de  $a$  est équivalente à l'égalité de la forme  $0=Ga+Ha_0$ , où le produit des coefficients de  $a$  et de  $a_0$  est égal à zéro identiquement.

De tout cela nous concluons que le cas où le produit des coefficients de  $a$  et de  $a_0$  dans l'égalité (2) est égal identiquement à zéro n'est autre chose que le cas où la détermination de  $a$  est intermédiaire. Donc tout ce que nous avons dit dans notre article précédent doit se rapporter à l'égalité (2) assujettie à la condition:  $GH$  est égal à zéro identiquement.

Revenons au cas général où cette dernière condition n'est pas nécessaire. On peut démontrer avant tout qu'en ce cas le

même produit  $GH$ , n'étant nécessairement égal au zéro *identiquement*, doit s'égaliser au zéro *logiquement*. En effet, la multiplication de deux membres de l'égalité (2) par le produit  $GH$  nous donne:

$$GHa + GHa_0 = GH(a + a_0) = GH = 0. \quad . \quad . \quad (3)$$

Cette condition ( $GH$  est égal à zéro logiquement) est l'une des conséquences nécessaires de l'égalité donnée (1) ou (2).

Le même résultat nous le pouvons recevoir autrement, à l'aide de la transformation suivante:

$$0 = Ga + Ha_0 = aG(H + H_0) + a_0H(G + G_0) = GH + aGH_0 + a_0G_0H,$$

d'où nous concluons que

$$(0 = Ga + Ha_0) = (0 = GH, 0 = aGH_0 + a_0G_0H) \quad . \quad . \quad (4)$$

et par conséquent l'égalité (3) n'est qu'une des conséquences de l'égalité donnée (2).

La même formule (4) nous montre encore que toutes les connaissances exprimées par l'égalité donnée (1) ou (2) se divisent en deux parties: 1° les connaissances qui sont renfermées dans l'égalité  $GH=0$  et 2° les connaissances qui sont représentés par l'égalité  $0=aGH_0+a_0G_0H$ . On peut montrer que ces deux groupes des connaissances sont tout à fait différentes. En effet, le produit de deux fonctions  $GH$  et  $aGH_0+a_0G_0H$  est égal identiquement à zéro. Donc ces deux fonctions n'ont pas des subclasses communes et par conséquent les deux groupes mentionnées des connaissances n'ont rien de commun, sont différentes. Mais les connaissances de l'égalité  $GH=0$  ne renferment pas la lettre  $a$ , ne se rapportent point à la classe  $a$ . Par conséquent les connaissances de l'égalité  $0=aGH_0+a_0G_0H$ , qui concernent à la classe  $a$  et n'ont rien de commun avec les connaissances de la première groupe, ne peuvent contenir aucune des connaissances indépendantes de



la lettre  $a$ . Voilà pourquoi nous pouvons dire que 1° l'égalité  $GH=0$  est le résultat complet de l'élimination de  $a$  de l'égalité donnée (1) ou (2) et 2° l'égalité  $0=aGH_0+a_0G_0H$  est la collection de toutes les connaissances sur la classe  $a$  tirées de la même égalité donnée.

Il est aisé à comprendre que si la première de ces deux égalités est une identité  $0=0$ , toutes les connaissances de l'égalité donnée se rapportent à  $a$ , et il est impossible d'y éliminer la lettre  $a$ .

Vu que

$$\begin{aligned}(0=Ga+Ha_0)&=(a=G_0a+Ha_0), \\ (0=GH_0a+G_0Ha_0)&=[a=a(G_0+H)+a_0G_0H]= \\ &=[a=G_0H+a(GH+G_0H_0)],\end{aligned}$$

nous pouvons écrire ainsi la formule (4):

$$(a=G_0a+Ha_0)=[0=GH, a=G_0H+a(GH+G_0H_0)]. \quad (5)$$

Cette formule (5) nous montre que chaque *détermination bipartible* de la simple classe  $a$  est équivalente à sa quelque *détermination intermédiaire* liée avec la collection des connaissances qui ne se rapportent point à cette classe. Donc toutes les racines de  $a$  pour la seconde de ces deux déterminations doivent servir aussi de racines de  $a$  pour la première.

Cette vérité nous pouvons la démontrer d'une autre manière. En effet, nous savons déjà que pour la détermination intermédiaire

$$a=G_0H+a(GH+G_0H_0) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

la formule générale des racines de  $a$  est

$$a=G_0H+x(GH+G_0H_0) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

et la formule des racines de  $a_0$  est:

$$a_0=[G_0H+x(GH+G_0H_0)]_0=G_0H+x_0(GH+G_0H_0) \quad . \quad (8)$$

En substituant dans la formule (5) au lieu de  $a$  et de  $a_0$  leurs valeurs (7) et (8) nous aurons:

$$[G_0H + x(GH + G_0H_0) = G_0H + xG_0H_0 + x_0GH] = (GH=0, \\ 0=0) = (GH=0).$$

Mais cette formule est une identité, car d'après la règle générale  $(A=B) = (0=AB_0 + A_0B)$  nous aurons:

$$[G_0H + x(GH + G_0H_0) = G_0H + xG_0H_0 + x_0GH] = (GH=0).$$

Cela nous montre encore une fois que les formules (7) et (8) aidées par l'égalité  $GH=0$  satisfont à l'égalité donnée (1) ou (2) identiquement. Donc les racines de la détermination intermédiaire (6) sont en même temps les racines de l'égalité donnée (1) ou (2).

Les mêmes substitutions faites plus haut nous montrent aussi que, sans l'aide de l'égalité (3) qui est  $GH=0$ , les racines (6) et (7) transforment l'égalité donnée (1) ou (2) en cette même égalité (3). Donc les racines de  $a$  pour la détermination bipartible de  $a$  et par conséquent pour chaque égalité (1) contenant la lettre  $a$ , n'ont pas la propriété de satisfaire à elle identiquement, mais elles la transforment dans le résultat complet de l'élimination de cette lettre. Évidemment, les racines de la détermination intermédiaire de  $a$  satisfont aussi à cette dernière condition, car dans ce cas le résultat complet de l'élimination de  $a$  est lui même une identité  $0=0$ . Ainsi nous pouvons dire généralement que les racines de chaque simple classe  $a$  pour chaque égalité donnée  $N=0$  sont les fonctions qui ne dépendent pas de  $a$  et transforment cette égalité dans le résultat complet de l'élimination de la lettre  $a$ .

De ce qui précède nous voyons aussi que les racines de  $a$  et de  $a_0$  pour chaque égalité donnée (1) ou (2) doivent être les négations mutuelles.

Démontrons que chaque égalité logique doit toujours avoir

les racines pour chacune de ses simples classes. L'égalité donnée (1) ou (2) nous pouvons la réduire à la forme

$$a = aG_0 + a_0H, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

qui nous montre que  $a$  est contenue en  $G_0$  et contient  $H$ . Pour que cette détermination de  $a$  soit réelle, il faut que  $H$  soit contenue en  $G_0$ , ce qui coïncide avec la condition (3) qui est toujours satisfaite. Ces motifs démontrent la proposition.

Cherchons maintenant le nombre des racines principales pour l'égalité donnée (1) ou (2) ou (9). Vu que les trois produits  $G_0H$ ,  $GH$ ,  $G_0H$ ,  $G_0H_0$  et  $GH$ ,  $G_0H_0$  sont identiquement égaux à zéro, les trois fonctions  $G_0H$ ,  $GH$  et  $G_0H_0$  qui figurent dans la formule des racines (7) sont disjonctives, c'est à dire elles ne peuvent pas avoir des subclasses communes. Donc toutes les classes trouvées pour  $a$  d'après la formule (7) doivent être différentes. Par conséquent le nombre total des racines de  $a$  pour l'égalité donnée (2) doit s'égaliser à  $2^{i+k}$ , où  $i$  est le nombre des minimaux de la fonction  $G_0H_0$  et  $k$  est le nombre des minimaux de la fonction  $GH$ .

Nous recevrons toutes ces racines en ajoutant à la même fonction  $G_0H$  toutes les sommes des minimaux de la fonction  $GH + G_0H_0$ .

Démontrons que toutes ces racines se partagent dans le nombre  $2^i$  des groupes chacune desquelles renferme le nombre  $2^k$  des racines *égales logiquement* les unes aux autres.

Nous savons que la fonction  $GH$  est, comme le montre l'égalité (3), égale logiquement à zéro. Donc chacune de ses subclasses et par conséquent chacun de ses minimaux doit être aussi égal logiquement au zéro. Mais la fonction  $GH$  a par supposition le nombre  $k$  des minimaux, d'où il suit que le nombre de toutes les subclasses de cette fonction est égal à  $2^k$ . Et nous savons déjà que chacune de ces  $2^k$  subclasses est logiquement égal à zéro.

Supposons à présent que  $A$  est l'une des fonctions disjonctives avec  $GH$ . Alors l'addition successive de  $A$  avec toutes les  $2^k$  subclasses de  $GH$  nous donnera le nombre  $2^k$  des classes logiquement égales à  $A$ . Toutes ces classes sont généralement différentes, mais en force de l'égalité donnée (1) ou plus exactement de sa conséquence (3), elles sont logiquement égales les unes aux autres.

Rien ne nous empêche de calculer toutes les  $2^{i+k}$  racines de  $a$  par la manière suivante: d'abord ajouter à la même fonction  $G_0H$  toutes les  $2^i$  subclasses de la fonction  $G_0H_0$  et puis ajouter à chacun de ces  $2^i$  résultats toutes les  $2^k$  subclasses de la fonction  $GH$ . La première de ces deux opérations nous donnera les  $2^i$  classes qui sont les racines inégales de  $a$  et la seconde, réitérée  $2^k$  fois,—toutes les racines logiquement égales à chacune des racines précédentes.—La proposition énoncée plus haut est démontrée pleinement.

En supposant que le nombre des éléments de l'égalité donnée (1) est  $m$ , démontrons que le nombre  $i$  qui est le nombre des minimaux de la fonction  $G_0H_0$  doit s'égaliser à  $2^{\frac{n-1}{2}-m+k}$ , où  $n$  est comme précédemment le nombre de toutes les lettres de l'égalité donnée (1),  $k$  est le nombre des minimaux de la fonction  $GH$ . Vu que nous pouvons écrire ainsi l'égalité  $GH=0$ :  $0=GH a + GH a_0$ , la formule (5) nous montre que le nombre des éléments de la détermination intermédiaire (6) est égal à  $m-2k$ . D'un autre côté le nombre des racines de la même détermination (6) est  $2^{k+i}$ . Mais, conformément à ce qui est démontré dans mon article précédent, ce dernier nombre doit s'égaliser aussi à  $2^{\frac{n-1}{2}-m+2k}$ . D'où il suit que  $m=2^{\frac{n-1}{2}-i+k}$ . Notre proposition est démontrée, et nous voyons que le nombre des groupes des racines logiquement égales de  $a$  est  $2^{\frac{n-1}{2}-m+k}$ .

Encore une remarque. Nous savons que la formule des

racines (7) embrasse toutes les connaissances de la détermination intermédiaire (6) avec un quelque excès. S'il en est ainsi, la formule (5) nous montre que la même formule des racines (7) liée avec la condition  $GH=0$  embrasse toutes les connaissances de l'égalité donnée (1) avec un quelque excès.

Finalement nous pouvons formuler ainsi *la loi des racines* des égalités logiques:

1°. Chaque égalité logique  $N=0$  a toujours les racines pour chaque de ses simples classes  $a, a_0, b, b_0, \dots$

2°. Pour la résoudre relativement à  $a$  ou  $a_0$  il faut la réduire (en la multipliant par la somme  $a+a_0$ ) à la forme  $Ga+Ha_0=0$ , où  $G$  et  $H$  ne contiennent plus la lettre  $a$ .

3°. Les racines des classes opposées  $a$  et  $a_0$  existent en nombre égal et sont les négations mutuelles.

4°. La racine de  $a$  est une telle fonction de lettres restantes  $b, c, d, \dots$  qui, avec son négation, transforme l'égalité  $aGH_0+a_0G_0H=0$  dans une identité et l'égalité donnée  $N=0$  dans l'égalité  $GH=0$  qui est le résultat complet de l'élimination de la lettre  $a$ .

5°. Si les nombres  $i$  et  $k$  sont les nombres des minimaux des fonctions  $G_0H_0$  et  $GH$ , alors le nombre total des racines principales de  $a$  pour l'égalité donnée est  $2^{i+k}$ . Toutes ces racines sont renfermées dans la formule (7). Nous pouvons recevoir les racines de  $a_0$  ou par la négation des celles de  $a$ , ou indépendamment par la formule (8).

6°. Toutes les  $2^{i+k}$  racines de  $a$  (et de  $a_0$ ) se partagent en  $2^i$  groupes chacune desquelles embrasse le nombre  $2^k$  des racines logiquement égales les unes aux autres.

7°. Si  $m$  est le nombre des éléments de l'égalité donnée, le nombre des groupes mentionnés doit s'égaliser à  $2^{2^{\frac{n-1}{2}-m+k}}$ ,  $n$  étant le nombre des lettres de l'égalité donnée.

8°. L'un représentant de chaque groupe se trouvera à l'aide des formules:

$$a = G_0 H + x G_0 H_0, \quad a_0 = G H_0 + y G_0 H_0.$$

Ces racines de  $a$  et de  $a_0$  ne sont pas les négations mutuelles; leurs négations se trouvent parmi les autres représentants des groupes.

9°. L'un représentant de quelque groupe étant trouvé, tous les autres représentants du même groupe s'obtiendront d'après les formules:

$$a = a + z G H, \quad a_0 = a_0 + u G H.$$

10°. La formule des racines liée avec la condition  $GH=0$  embrasse toutes les connaissances de l'égalité donnée avec un quelcun excès.

11°. Toutes les racines secondaires (ou imaginaires) de  $a$  et de  $a_0$  se trouveront en nombre infini d'après les formules (7) et (8) en supposition que la classe arbitraire  $x$  renferme, outre les lettres restantes du discours  $b, c, d, \dots$ , quelques lettres  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  étrangères à l'égalité donnée  $N=0$ .

*Exemple.* Trouvons pour le problème de M. Venn:

$$a = a(bc_0 + b_0c), \quad b = ab$$

toutes les racines principales pour toutes ses classes simples  $a, a_0, b, b_0, c$  et  $c_0$ .

L'égalité exprimant tout le contenu du problème est par exemple:

$$0 = a(bc + b_0c_0) + a_0b. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Pour la résoudre relativement à  $a$  et  $a_0$ , il ne faut pas la réduire à la forme (2), car elle a déjà cette forme. Nous avons:

$$\begin{aligned} G &= bc + b_0c_0, \quad H = b, \quad G_0 = bc_0 + b_0c, \quad H_0 = b_0; \\ GH &= bc, \quad GH_0 = b_0c_0, \quad G_0H = bc_0, \quad G_0H_0 = b_0c. \end{aligned}$$



L'égalité (10) équivalente à la détermination bipartible

$$a = a(bc_0 + b_0c) + a_0b$$

est aussi équivalente au système:

$$bc = 0, \quad a = bc_0 + a(bc + b_0c)$$

et encore au système:

$$bc = 0, \quad a_0 = b_0c_0 + a_0(bc + b_0c).$$

Ici le résultat complet de l'élimination de la lettre  $a$  n'est pas une identité. Par conséquent on aura les racines de  $a$  logiquement égales les unes aux autres. Les nombres  $i$  et  $k$  étant égales à 1 (\*), le nombre total des racines de  $a$  doit être  $2^{1+1} = 4$ . Ces racines doivent se partager en deux groupes avec deux racines logiquement égales dans la chacune. Pour trouver les racines inégales il faut se servir des formules:

$$a = bc_0 + xb_0c, \quad a_0 = b_0c_0 + yb_0c,$$

qui nous donnent:

$$a^{(1)} = bc_0, \quad a^{(2)} = bc_0 + b_0c; \quad a_0^{(1)} = b_0c_0, \quad a_0^{(2)} = b_0c_0 + b_0c = b_0.$$

Voyons que ces racines de  $a$  et de  $a_0$  ne sont pas les négations mutuelles. Les racines restantes seront:

$$\begin{aligned} a^{(3)} &= a^{(1)} = a^{(1)} + bc = bc_0 + bc = b, \\ a^{(4)} &= a^{(2)} = a^{(2)} + bc = bc_0 + b_0c + bc = b + c, \\ a_0^{(3)} &= a_0^{(1)} = a_0^{(1)} + bc = b_0c_0 + bc, \\ a_0^{(4)} &= a_0^{(2)} = a_0^{(2)} + bc = b_0 + bc = b_0 + c. \end{aligned}$$

---

\*) Il faut observer que le nombre  $m$  des éléments du problème discuté est 4, le nombre  $n$  de toutes ses lettres est 3. Donc le rapport général  $i = 2 - \frac{n-1}{m+k}$  nous donne pour ce problème  $i = k$ . Conformément à cela nous voyons que pour les racines de  $a$  les nombres  $i$  et  $k$  sont égaux l'un à l'autre. La même chose aura lieu pour les racines de  $b$  et de  $c$ .

Finalement toutes les racines de  $a$  sont:

$$bc_0, bc_0 + b_0c, b, b+c$$

et toutes les racines de  $a_0$ :

$$b_0c_0, b_0, b_0c_0 + bc, b_0 + c.$$

Evidemment les négations des quatre premières des ces fonctions se trouvent parmi les quatre secondes.

L'une de ces racines, par exemple  $a=b$ , et sa négation  $a_0=b_0$  transforment en identité l'égalité  $aGH_0 + a_0G_0H=0$  qui est en ce cas  $ab_0c_0 + a_0bc_0=0$ . Quant à l'égalité donnée (10), elles la transforment dans le résultat complet de l'élimination de  $a$  qui est  $bc=0$ .

Revenons à l'égalité donnée (10) pour la résoudre relativement à  $b$  et  $b_0$ . En la multipliant par la somme  $b+b_0$  nous aurons:

$$0=abc + a_0b + ab_0c_0 = b(a_0 + c) + b_0 \cdot ac_0.$$

Pour cette égalité les valeurs des coefficients et d'autres fonctions nécessaires sont:

$$\begin{aligned} G &= a_0 + c, \quad H = ac_0, \quad G_0 = ac_0, \quad H_0 = a_0 + c; \\ GH &= 0, \quad GH_0 = a_0 + c, \quad G_0H = ac_0, \quad G_0H_0 = 0. \end{aligned}$$

Ici les nombres  $i$  et  $k$  sont égales à zéro. Le nombre total des racines de  $b$  (et de  $b_0$ ) est  $2^{0+0}=1$ . Toutes les connaissances du problème se rapportent à la lettre  $b$  qui ne peut pas d'y être éliminée. Les racines uniques de  $b$  et de  $b_0$  trouvées par les formules (7) et (8) sont:

$$b=ac_0, \quad b_0=a_0+c.$$

Chacune de ces deux simples égalités est équivalente à l'égalité donnée (10) et nous représente la détermination complète de  $b$  (et de  $b_0$ ) et en même temps sa racine unique.

Enfin, pour résoudre l'égalité donnée (10) relativement à  $c$  et  $c_0$ , multiplions la par la somme  $c + c_0$  et nous aurons:

$$0 = abc + a_0bc + ab_0c_0 + a_0b_0c_0 = c \cdot b + c_0(ab_0 + a_0b) \quad . \quad (11)$$

En ce cas:

$$G = b, \quad H = ab_0 + a_0b, \quad G_0 = b_0, \quad H_0 = ab + a_0b_0;$$

$$GH = a_0b, \quad GH_0 = ab, \quad G_0H = ab_0, \quad G_0H_0 = a_0b_0.$$

Les nombres  $i$  et  $k$  sont égaux de nouveau à 1. Toutes les quatre racines de  $c$  trouvées par la formule

$$c = G_0H + x(GH + G_0H_0) = ab_0 + x(a_0b + a_0b_0) \quad . \quad (12)$$

sont:

$$ab_0, \quad ab_0 + a_0b, \quad b_0, \quad a_0 + b_0.$$

La négation de ces fonctions nous donnera pour les racines de  $c_0$ :

$$a_0 + b, \quad ab + a_0b_0, \quad b, \quad ab.$$

Les racines logiquement égales sont:

$$ab_0 = ab_0 + a_0b, \quad b_0 = a_0 + b_0,$$

$$a_0 + b = ab + a_0b_0, \quad b = ab.$$

A la fin nous allons trouver pour la même égalité (11) l'une des racines *secondaires* de  $c$ . Posons dans la formule (12)  $x = bd$ , où  $d$  est une lettre étrangère au problème. Nous aurons la racine:

$$c = ab_0 + a_0bd \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

La substitution en (11) de cette valeur de  $c$  et de son négation qui est  $c_0 = ab + a_0(b_0 + d_0)$  nous donnera:

$$0 = b(ab_0 + a_0bd) + (ab_0 + a_0b)[ab + a_0(b_0 + d_0)] = a_0bd + a_0bd_0 = a_0b,$$

c'est à dire le résultat complet de l'élimination de la lettre  $c$ . Cela démontre que la valeur (13) est effectivement l'une des racines de  $c$ .

X.

Encore une fois sur le nombre des éléments des égalités logiques.

Dans mon article précédent j'ai construit le rapport

$$m = 2^{n-1} - i + k, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

où  $m$  est le nombre des éléments de l'égalité

$$Ga + Ha_0 = 0,$$

$n$  est le nombre des lettres  $a, b, d, \dots$  de cette égalité,  $i$  est le nombre des minimaux de  $n-1$  lettres  $b, c, d, \dots$  pour la fonction  $G_0H_0$ , enfin  $k$  est le nombre des minimaux des mêmes lettres  $b, c, d, \dots$  pour la fonction  $GH$ . Evidemment ce rapport peut servir pour trouver le nombre des éléments  $m$  pour chaque problème logique exprimé à l'aide des égalités. Ainsi nous recevons pour ce but, outre la méthode exposée dans mon article IV, une autre méthode générale qui consiste en ce qui suit.

En réduisant le problème donné à la forme de l'égalité seule:

$$N(a, b, c, d, \dots) = 0$$

et cette égalité à la forme de son développement relativement à l'une de ses lettres  $a$ , c'est à dire à la forme:

$$aN(1, b, c, d, \dots) + a_0N(0, b, c, d, \dots) = 0,$$

nous aurons d'abord (en posant  $N_0 = M$ ),

$$G = N(1, b, c, d, \dots), \quad H = N(0, b, c, d, \dots),$$

$$G_0 = M(1, b, c, d, \dots); \quad H_0 = M(0, b, c, d, \dots)$$

et puis

$$GH = N(1)N(0), \quad G_0N_0 = M(1)M(0).$$

Donc, si nous prendrons pour  $i$  le nombre des minimaux du produit  $M(1)M(0)$  et pour  $k$  le nombre des minimaux du

produit  $N(1)N(0)$ , le rapport (1) nous donnera le nombre des éléments du problème donné.

*Exemple 1.* Trouver le nombre des éléments de l'égalité

$$0 = abcd + a_0bc_0 + ab_0d.$$

En ce cas nous avons:

$$N = a(bcd + b_0d) + a_0bc_0, \quad M = a[(bc_0 + d_0) + b_0d_0] + a_0(b_0 + c).$$

En supposant que le développement doit être fait relativement à la lettre  $a$ , nous aurons:

$$\begin{aligned} N(1) &= bcd + b_0d, & N(0) &= bc_0, \\ M(1) &= bc_0 + bd_0 + b_0d_0, & M(0) &= b_0 + c, \\ N(1)N(0) &= 0, & k &= 0; & M(1)M(0) &= b_0d_0 + bcd_0, & i &= 3. \end{aligned}$$

Vu qu'en ce cas  $n=4$ , nous recevrons finalement:

$$m = 2^{4-1} - 3 + 0 = 8 - 3 = 5.$$

Evidemment les cinq éléments de l'égalité donnée sont:

$$0 = abcd, \quad 0 = ab_0c_0d, \quad 0 = ab_0c_0\bar{d}, \quad 0 = a_0bc_0d, \quad 0 = a_0bc_0\bar{d}.$$

*Exemple 2.* Pour l'égalité

$$a = a(bc_0 + b_0c) + a_0b,$$

qui exprime le problème de Venn, nous avons:

$$\begin{aligned} G_0 &= bc_0 + b_0c, & H &= b, \\ G &= bc + b_0c_0, & H_0 &= b_0, \\ GH &= bc, & k &= 1; & G_0H_0 &= b_0c, & i &= 1; \\ m &= 2^{2-1} - i + k = 2^{3-1} - 1 + 1 = 4. \end{aligned}$$

## XI.

**La loi de l'élimination des lettres (ou des termes simples) dans les égalités logiques.**

Avant de construire les règles de l'élimination des lettres dans les égalités logiques, il est nécessaire de se rappeler les règles des *développements* des fonctions logiques.

Il y a deux sortes des développements des classes: les développements en ses subclasses et les développements en ses superclasses. Nous pouvons effectuer les développements de ces deux sortes relativement à une lettre, à deux, à trois etc.

Pour développer une fonction quelconque  $f(a, b, c, d, \dots)$  relativement à l'une de ses lettres  $a$ , nous avons les deux formules:

$$\begin{aligned} f(a, b, c, d, \dots) &= af(1, b, c, d, \dots) + a_0 f(0, b, c, d, \dots), \\ f(a, b, c, d, \dots) &= [a + f(0, b, c, d, \dots)] [a_0 + f(1, b, c, d, \dots)], \end{aligned}$$

où le symbole  $f(1, b, c, d, \dots)$  se déduit du symbole  $f(a, b, c, d, \dots)$  par les changements de  $a$  en 1 et  $a_0$  en 0, le symbole  $f(0, b, c, d, \dots)$ —par les changements de  $a$  en 0 et  $a_0$  en 1.

Les deux développements de la même fonction relativement à deux lettres  $a$  et  $b$  sont:

$$\begin{aligned} f(a, b, c, \dots) &= abf(1, 1, c, \dots) + ab_0 f(1, 0, c, \dots) + a_0 b f(0, 1, c, \dots) + \\ &\quad + a_0 b_0 f(0, 0, c, \dots), \\ f(a, b, c, \dots) &= [a + b + f(0, 0, c, \dots)] [a + b_0 + f(0, 1, c, \dots)] \\ &\quad [a_0 + b + f(1, 0, c, \dots)] [a_0 + b_0 + f(1, 1, c, \dots)]. \end{aligned}$$

Les deux développements relativement à trois lettres doivent contenir: l'une le nombre  $2^3$  des membres et l'autre le nombre  $2^3$  des facteurs.

La loi de ces deux sortes des développements est évidente. Pour développer en subclasses la fonction de  $n$  lettres relativement à  $n-i$  lettres, il faut composer tous les  $2^{n-i}$  minimaux de ces  $n-i$  lettres et les multiplier par les  $2^{n-i}$  symboles déduits de la fonction donnée par les changements en 1 et en 0 de toutes les  $n-i$  lettres mentionnées. Pour développer en les superclasses la fonction de  $n$  lettres relativement à  $n-i$  lettres, il faut composer tous les  $2^{n-i}$  maximaux de ces lettres



et les additionner avec les  $2^{n-i}$  symboles, les mêmes que plus haut, mais ordonnés autrement.

Les symboles multipliés par les minimaux dans le premier développement s'appellent les *coefficients* de ce développement. Les symboles qui figurent dans le second développement seront nommés les *coopérants* de ce développement. Ainsi l'un de deux développements de la même fonction relativement à  $n-i$  lettres contient les minimaux de ces lettres avec quelques coefficients et l'autre—les maximaux de ces lettres avec quelques coopérants.

Revenons à notre sujet—l'élimination de lettres dans les égalités logiques.

La formule (4) de l'article IX nous montre que pour l'égalité  $Ga + Ha_0 = 0$  le résultat complet de l'élimination de la lettre  $a$  est  $GH = 0$ . Donc, pour l'égalité générale

$$N(a, b, c, d, \dots) = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

que nous pouvons réduire à l'aide des développements à la forme

$$aN(1, b, c, d, \dots) + a_0N(0, b, c, d, \dots) = 0 \quad . \quad . \quad (2)$$

et aussi à la forme

$$[a + N(0, b, c, d, \dots)] [a_0 + N(1, b, c, d, \dots)] = 0, \quad . \quad (3)$$

le résultat complet de l'élimination de  $a$  est évidemment:

$$N(1, b, c, d, \dots) N(0, b, c, d, \dots) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

D'où cette règle générale: pour éliminer la lettre  $a$  de l'égalité générale (1), il faut: 1°, développer la fonction  $N$  relativement à  $a$  ou dans les minimaux de cette lettre, ou dans ses maximaux (\*), après quoi l'égalité donnée prend ou la

---

\*) Pour le monde du discours d'une seule lettre  $a$  les deux simples classes  $a$  et  $a_0$  sont en même temps les deux minimaux et les deux maximaux de ce discours.

forme (2), ou la forme (3), et 2° ou égaliser au zéro le produit des coefficients des minimaux de la forme (2), ou substituer le zéro au lieu de  $a$  et de  $a_0$  dans la forme (3); l'un et l'autre de ces deux procédés nous conduit à l'égalité (4) qui est le résultat complet de l'élimination de  $a$  dans l'égalité (1).

Supposons à présent que l'égalité générale est de la forme:

$$M(a, b, c, d, \dots) = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1^*)$$

Les deux développements de la fonction  $M$  relativement à la lettre  $a$  lui donnent la forme:

$$aM(1, b, c, d, \dots) + a_0M(0, b, c, d, \dots) = 1. \quad (2^*)$$

et la forme

$$[a + M(0, b, c, d, \dots)] [a_0 + M(1, b, c, d, \dots)] = 1 \quad (3^*)$$

D'un autre côté, l'égalité (1\*) est équivalente à l'égalité

$$M_0(a, b, c, d, \dots) = 0.$$

Donc, le résultat complet de l'élimination de  $a$  dans l'égalité (1\*) est

$$M_0(1, b, c, d, \dots) M_0(0, b, c, d, \dots) = 0,$$

ou, ce qui est la même chose:

$$M(1, b, c, d, \dots) + M(0, b, c, d, \dots) = 1 \quad . \quad . \quad . \quad (4^*)$$

De là cette seconde règle générale: pour éliminer la lettre  $a$  de l'égalité donnée  $M=1$ , il faut: 1°, développer la fonction  $M$  relativement à  $a$  ou dans les minimaux de cette lettre, ou dans ses maximaux, après quoi l'égalité donnée prenne ou la forme (2\*) ou la forme (3\*); et puis, 2°, ou substituer l'unité au lieu de  $a$  et de  $a_0$  dans la forme (2\*), ou égaliser à l'unité la somme des coopérants des maximaux de la forme (3\*); l'un et l'autre de ces deux procédés nous conduit à l'égalité (4\*) qui

est le résultat complet de l'élimination de  $a$  dans l'égalité donnée (1\*).

Les deux règles trouvées plus haut peuvent sembler un peu artificielles, mais elles ont cette propriété précieuse qu'elles admettent la généralisation.

En effet: 1°, l'élimination de  $b$  dans l'égalité (4) nous donne d'après l'une de ces deux règles:

$$\begin{aligned} N(1, 1, c, d, \dots) N(1, 0, c, d, \dots) N(1, 1, c, d, \dots) \\ N(0, 0, c, d, \dots) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5) \end{aligned}$$

et, 2°, l'élimination de  $b$  dans l'égalité (4\*) nous donne d'après l'autre règle précédente:

$$\begin{aligned} M(1, 1, c, d, \dots) + M(1, 0, c, d, \dots) + M(0, 1, c, d, \dots) + \\ M(0, 0, c, d, \dots) = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5^*) \end{aligned}$$

Les formules (5) et (5\*) expriment ces deux règles générales:

1° Pour éliminer de l'égalité  $N(a, b, c, d, \dots) = 0$  les deux lettres  $a$  et  $b$  à la fois, il faut d'abord développer la fonction  $N$  relativement à  $a$  et à  $b$  ou dans les minimaux de ces deux lettres ou dans ses maximaux, ce qui nous donne ou l'égalité de la forme

$$\begin{aligned} abN(1, 1, c, d, \dots) + ab_0N(1, 0, c, d, \dots) + a_0bN(0, 1, c, d, \dots) + \\ + a_0b_0N(0, 0, c, d, \dots) = 0, \dots \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6) \end{aligned}$$

ou l'égalité de la forme:

$$\begin{aligned} [a + b + N(0, 0, c, d, \dots)] [a + b_0 + N(0, 1, c, d, \dots)] \\ [a_0 + b + N(1, 0, c, d, \dots)] [a_0 + b_0 + N(1, 1, c, d, \dots)] = 0; \quad . \quad (7) \end{aligned}$$

et puis on égalise au zéro le produit des coefficients de tous les minimaux de la formule (6), ou substituer le zéro dans la formule (7) au lieu de tous les quatre symboles simples  $a, a_0,$

$b$  et  $b_0$ . L'un et l'autre de ces deux procédés nous conduit à l'égalité (5) qui est le résultat complet de l'élimination de  $a$  et de  $b$  dans l'égalité donnée (1).

2°, Pour éliminer de l'égalité  $M(a, b, c, d, \dots) = 1$  les deux lettres  $a$  et  $b$  à la fois, il faut d'abord développer la fonction  $M$  relativement à  $a$  et à  $b$  ou dans les minimaux de ces deux lettres ou dans ses maximaux, ce qui nous donne ou l'égalité de la forme

$$abM(1, 1, c, d, \dots) + ab_0M(1, 0, c, d, \dots) + a_0bM(0, 1, c, d, \dots) + a_0b_0M(0, 0, c, d, \dots) = 1, \quad (6^*)$$

ou l'égalité de la forme:

$$\begin{aligned} & [a + b + M(0, 0, c, d, \dots)] [a + b_0 + M(0, 1, c, d, \dots)] \\ & [a_0 + b + M(1, 0, c, d, \dots)] [a_0 + b_0 + M(1, 1, c, d, \dots)] = 1; \quad (7^*) \end{aligned}$$

et puis on substitue dans l'égalité (6\*) l'unité au lieu de tous les quatre symboles simples  $a$ ,  $a_0$ ,  $b$  et  $b_0$ , ou égaler à l'unité la somme de tous les coopérants des maximaux de la formule (7\*). L'un et l'autre de ces deux procédés nous conduit à l'égalité (5\*) qui est le résultat complet de l'élimination de  $a$  et de  $b$  dans l'égalité donnée (1\*).

Il y'a plus de doute que ces deux règles présentent la généralisation des règles de l'élimination d'une seule lettre et qu'elles peuvent être retendues plus loin sur les cas de l'élimination de trois lettres, de quatre lettres et ainsi de suite.

Dans la pratique les classes  $N$  et  $M$  sont presque toujours les polynômes (et non pas les polyfacteurs) et leurs développements se font dans minimaux (et non pas dans maximaux). A ces causes pour la pratique nous n'avons que ces deux règles:

1° pour éliminer quelques lettres de l'égalité  $N = 0$ , il faut développer  $N$  dans les minimaux de ces lettres et égaler au zéro le produit de tous les coefficients du développement;

2°, pour éliminer quelques lettres  $p, q, r, \dots$  de l'égalité  $M=1$ , il faut développer  $M$  dans les minimaux de ces lettres et changer en 1 tous les symboles simples  $p, p_0, q, q_0, r, r_0, \dots$ .

Regardons à présent: est-il nécessaire de développer préalablement les fonctions  $N$  et  $M$  dans les minimaux?

Prenons d'abord l'égalité du type  $N=0$  et supposons que la fonction  $N$  n'est pas développée dans les minimaux de la lettre  $a$  que nous voulons éliminer. En ce cas l'égalité  $N=0$  doit être de la forme:

$$0 = Pa + Qa_0 + R,$$

où  $P, Q$  et  $R$  ne dépendent point de la lettre  $a$ . En éliminant d'ici d'après la règle générale la lettre  $a$ , pour le résultat complet de l'élimination nous aurons finalement:

$$0 = R + PQ.$$

D'où cette règle spéciale pour le cas considéré: égaliser au zéro le terme indépendant de  $a$  et de  $a_0$  et aussi le produit des coefficients des symboles  $a$  et  $a_0$ . En particulier, pour l'égalité de la forme  $0 = Pa + R$  ou de la forme  $0 = Qa_0 + R$  le résultat complet de l'élimination de  $a$  est  $R=0$ ; pour l'égalité de la forme  $0 = Pa$  ou de la forme  $0 = Qa_0$  le résultat de l'élimination de  $a$  est l'identité  $0=0$ . Dans ces deux derniers cas toutes les connaissances de l'égalité donnée se rapportent à la lettre  $a$  qui pour cette raison ne peut point y être éliminée.

Ce qui précède nous montre que pour l'égalité du type  $N=0$  la règle générale donnée plus haut exige nécessairement que la fonction  $N$  soit préalablement développée en minimaux, car si cette condition est violée, la règle générale doit être remplacée par les règles spéciales.

Une autre chose a lieu pour la seconde règle générale construite pour l'égalité du type  $M=1$ . Nous pouvons montrer qu'en ce cas le développement préalable de  $M$  en les minimaux n'est point nécessaire. En effet, pour l'égalité

$$1=Aa+Ba_0+C, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

où la fonction  $M$  n'est pas développée relativement à  $a$ , la règle générale nous donnera d'abord

$$1=a(A+C)+a_0(B+C)$$

et puis finalement:

$$1=(A+C)+(B+C)=A+B+C \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Ce résultat complet de l'élimination (9) se déduit de l'égalité donnée (8) à l'aide de changement de  $a$  et de  $a_0$  en 1, c'est à dire conformément à la règle générale, mais sans le développement préalable de la fonction  $M$ .

Il n'y a pas de doute que l'élimination d'une autre lettre  $b$  dans l'égalité (6) s'effectuera à l'aide de simple changement de  $b$  et de  $b_0$  en 1 et que nous pouvons déduire ce résultat de l'égalité (8) par le changement des quatre symboles  $a$ ,  $a_0$ ,  $b$  et  $b_0$  en 1. Et ainsi de suite. Donc, finalement la règle de l'élimination des lettres pour l'égalité du type  $M=1$  prend cette forme simple: pour éliminer de l'égalité  $M=1$  quelques  $i$  lettres  $p, q, r, \dots$ , il suffit de changer en 1 tous les  $2i$  symboles  $p, p_0, q, q_0, r, r_0, \dots$ . Cette règle est très commode pour la pratique (\*).

#### *Exemples.*

1°. Pour l'égalité  $0=ac+bc_0$  les résultats complets de

---

(\*) Cette règle n'est pas efficace pour le seul cas, où la fonction  $M$  est décomposée dans les facteurs dépendants des lettres à éliminer. Alors, avant d'employer la règle, il faut effectuer les multiplications.



l'élimination sont: de la lettre  $a$ —l'égalité  $bc_0=0$ , de la lettre  $b$ —l'égalité  $ac=0$ , de la lettre  $c$ —l'égalité  $ab=0$ .

2°. Pour l'égalité  $1=ac+bc_0$  les résultats complets de l'élimination sont: de  $a$ —l'égalité  $1=c+bc_0=b+c$ , de  $b$ —l'égalité  $1=ac+c_0=a+c_0$  et de  $c$ —l'égalité  $1=a+b$ .

3°. Eliminons les deux lettres  $a$  et  $b$  de l'égalité  $0=bd+c_0d_0+ab_0cd$ . En ce cas nous avons:

$$N(a,b)=bd+c_0d_0+ab_0cd,$$

$$N(1, 1)=d+c_0d_0, \quad N(1, 0)=c_0d_0+cd, \quad N(0, 1)=d+c_0d_0,$$

$$N(0, 0)=c_0d_0.$$

L'égalité développée sera:

$$0=ab(d+c_0d_0)+ab_0(c_0d_0+cd)+a_0b(d+c_0d_0)+a_0b_0c_0d_0.$$

Donc le résultat complet de l'élimination de  $a$  et de  $b$  est:

$$0=(d+c_0)(cd+c_0d_0)(d+c_0)c_0d_0=c_0d_0.$$

4°. Pour l'égalité  $1=bd+c_0d_0+ab_0cd$  le résultat complet de l'élimination de  $a$  et de  $b$  est  $1=d+c_0d_0+cd=d+c_0$ .

Il ne nous reste que de trouver les règles de l'élimination des lettres pour l'égalité du type le plus général qui est  $U=UA+U_0B$ .

Prenons d'abord l'égalité de la forme  $a=aA$  qui est la détermination de subordination de la simple classe  $a$  et éliminons d'ici les lettres  $p, q, r, \dots$ . L'égalité donnée étant équivalente à l'égalité  $1=a_0+A$ , le résultat complet de l'élimination demandée sera:  $1=a_0+A'$ , où  $A'$  se déduit de  $A$  par le changement en 1 de tous les symboles  $p, p_0, q, q_0, \dots$ . Mais l'égalité  $1=a_0+A'$  est équivalente à la détermination de subordination  $a=aA'$ . De là cette règle: pour éliminer quelques lettres  $p, q, r, \dots$  de la détermination de subordination de la simple classe  $a$ , il suffit de changer en 1 tous les symboles  $p, p_0, q, q_0, \dots$ .

Nous pouvons étendre cette règle sur le cas de l'élimination dans la détermination de subordination  $U=UA$ , où

$$A=f(a, b, \dots, p, q, \dots), \quad U=F(a, b, \dots),$$

des lettres  $p, q, \dots$  qui entrent en  $A$  et n'entrent point en  $U$ . En effet, supposons qu'après le changement en 1 de tous les symboles  $p, p_0, q, q_0, \dots$  la fonction  $A$  se transforme en  $A'$ . Alors il est clair que l'égalité  $U=UA$  équivalente à l'égalité  $1=U_0+A$  donne pour son résultat complet de l'élimination des lettres  $p, q, r, \dots$  l'égalité  $1=U_0+A'$  équivalente à l'égalité  $U=UA'$ .

Donc, la règle de l'élimination construite pour l'égalité du type  $1=M$  se rapporte aussi à chaque égalité de la forme  $a=aA$  sans exceptions et à chaque égalité  $U=UA$  pour le cas de l'élimination des lettres qui n'entrent point en  $U$  (\*). Ce cas est le seul qui peut se présenter dans la pratique, car l'élimination de la détermination d'une fonction des lettres à l'aide des quelles elle est construite serait un attentat à sa structure même.

*Exemples.* Pour l'égalité  $a=a(b_0+cd)$  le résultat complet de l'élimination de  $c$  est:  $a=a(b_0+d)$ .—Pour l'égalité  $ac=ac(b_0d+e)$  le résultat complet de l'élimination de  $b$  est:  $ac=ac(d+e)$ .

Prenons à présent la détermination de supériorité de la simple classe  $a=a+A$  pour y éliminer quelques lettres. Vu que cette détermination est équivalente à l'égalité  $0=a_0A$ , supposons que le résultat de l'élimination exigée est  $0=a_0A'$  où, ce qui est la même chose,  $a=a+A'$ . Cela nous montre que la règle construite pour l'égalité du type  $0=N$  se rapporte aussi à la détermination  $a=a+A$ . Cette règle est facile à

---

(\*) Il est utile à observer que l'égalité  $1=M$  est elle-même l'une des déterminations de subordination, comme nous le montre la transformation  $1=M=1.M$ .

étendre sur le cas de l'égalité  $U=U+A$  pour y éliminer quelques lettres qui entrent en  $A$  et n'entrent point en  $U$  (\*).

*Exemples.* Pour l'égalité  $a=a+bc+d_0$  le résultat complet de l'élimination de  $b$  est  $a=a+d_0$  et de  $d$  est  $a=a+bc$ .— Pour l'égalité  $ab=ab+c_0+de$  le résultat complet de l'élimination de  $c$  est  $ab=ab+de$ .

Prenons enfin la détermination bipartible de la simple classe  $a=aB+a_0C$  pour y éliminer quelques lettres  $p, q, r, \dots$  Cette détermination est équivalente au système:

$$a=aB, \quad a=a+C.$$

En supposant que pour ces deux égalités les résultats complets de l'élimination des lettres  $p, q, r, \dots$  sont

$$a=aB', \quad a=a+C',$$

nous trouverons l'égalité

$$a=aB' + a_0C'$$

comme le résultat complet de l'élimination demandée. Donc, pour éliminer quelques lettres dans la détermination bipartible de la simple classe  $a=aB+a_0C$ , il faut les éliminer: de  $B$  d'après la règle construite pour les déterminations de subordination et de  $C$  d'après la règle donnée pour les déterminations de supériorité. De la même manière doit s'effectuer dans la détermination bipartible générale  $U=UA+U_0B$  l'élimination des lettres qui se rencontrent parmi les lettres de  $A$  ou de  $B$  et n'entrent point dans l'expression de  $U$ .

Vu que la détermination du type  $U=UA+U_0B$  est la forme la plus générale des égalités logiques, nous recevons cette

(\*) L'égalité  $0=N$  est l'une des déterminations de supériorité, comme nous le montre la transformation  $0=N=0+N$ .



règle générale qui exprime la loi de l'élimination en Logique: pour éliminer de l'égalité générale  $U = UA + U_0B$  quelques lettres  $p, q, r, \dots$  qui n'entrent point en  $U$ , il faut remplacer en  $A$  tous les symboles  $p, p_0, q, q_0, r, r_0, \dots$  par l'unité et remplacer la fonction  $B$  par le produit de tous les coefficients du développement de  $B$  dans les minimaux de toutes les lettres  $p, q, r, \dots$

*Exemple 1.* Éliminer  $b$  de l'égalité  $a = ab_0c + a_0(b + d)$ . Nous aurons:  $a = a$ . 1.  $c + a_0d = ac + a_0d$ .

*Exemple 2.* Éliminer  $a$  de l'égalité  $bc = a + b$ . Nous aurons d'abord:  $bc = bc(a + b) + (b_0 + c_0)(a + b)$  et puis finalement:  $bc = bc(1 + b) + (b_0 + c_0)b = bc + bc_0 = b$ .

*Exemple 3.* Éliminer  $c$  de l'égalité  $bc = a + b$ . Nous aurons d'abord:  $a + b = (a + b)bc + a_0b_0$ .  $bc$  et puis finalement:  $a + b = (a + b)b$ .  $1 + 0 = b$ .

Il est évident que pour éliminer de l'égalité du type  $A = B$  quelques lettres qui n'entrent point en  $A$ , il faut la réduire à la forme  $A = AB + A_0B$  et puis employer la règle donnée plus haut.

Il est aisé à comprendre que chaque combinaison des quelques éléments du résultat complet de l'élimination est aussi l'un des résultats de l'élimination, mais ce n'est qu'une partie des connaissances du résultat complet et doit se nommer l'un des résultats partiels. Tout ce que nous disons ici sur les résultats de l'élimination se rapporte aux résultats complets.

Quant au nombre total des résultats complets de l'élimination des lettres pour quelque égalité ayant  $n$  lettres, il est évident que ce nombre doit s'égaliser à  $2^n$ . A ce nombre nous insérons aussi: 1° le résultat de non-élimination qui n'est autre chose que l'égalité donnée et 2° le résultat de l'élimination de toutes ses  $n$  lettres qui est toujours une identité. Quel-

ques uns de ces 2<sup>n</sup> résultats coïncident les uns avec les autres; beaucoup d'eux sont les identités.

Par exemple, pour l'égalité  $0 = bd + c_0d_0 + ab_0cd$  on aura 16 complets résultats de l'élimination de ses 4 lettres. Les huit de ces résultats sont les identités  $0 = 0$ , tous les autres sont: 1<sup>o</sup>, le résultat de non-élimination:  $0 = bd + c_0d_0 + ab_0cd$ ; 2<sup>o</sup>, le résultat de l'élimination de  $a$ :  $0 = bd + c_0d_0$ ; 3<sup>o</sup>, de  $b$ :  $0 = c_0d_0 + acd$ ; 4<sup>o</sup>, de  $c$ :  $0 = bd$ ; 5<sup>o</sup>, de  $d$ :  $0 = bc_0$ ; 6<sup>o</sup>, de  $a$  et de  $b$ :  $0 = c_0d_0$ ; 7<sup>o</sup>, de  $a$  et de  $c$ :  $0 = bd$ ; enfin 8<sup>o</sup>, de  $a$  et de  $d$ :  $0 = bc_0$ . Ici le résultat 4<sup>o</sup> coïncide avec 7<sup>o</sup> et le résultat 5<sup>o</sup> coïncide avec 8<sup>o</sup>.

Pour terminer cet article, disons quelques mots sur les résultats *masqués* de l'élimination des lettres.

Nous rencontrerons souvent cette sorte des résultats de l'élimination parmi les conséquences possibles des égalités logiques. Si toutes les conséquences d'une égalité contenant  $n$  lettres doivent avoir la forme des déterminations d'une fonction de quelques  $n-i$  de ces lettres, alors chaque résultat de l'élimination dans l'égalité donnée de quelques de ces  $n-i$  lettres, étant aussi l'une de ses conséquences, doit être nécessairement masqué. Chaque résultat masqué doit avoir la forme de la détermination fictive  $P = FQ + F_0Q_0$  dont la vraie valeur est  $Q_0 = 0$ . Par exemple, si toutes les conséquences de l'égalité  $0 = ax + bx_0$  seront cherchées en forme des déterminations de  $a$ , alors l'égalité  $0 = bx_0$ , qui est le résultat de l'élimination de  $a$  dans l'égalité donnée et en même temps l'une de ses conséquences, nous devons le trouver sous la forme de l'égalité  $a = a(b_0 + x) + a_0bx_0$  qui ne contient  $a$  que fictivement et la vraie valeur de laquelle est  $0 = bx_0$ . Évidemment, l'égalité  $a = a(b_0 + x) + a_0bx_0$  équivalente à l'égalité  $0 = bx_0$  est le résultat masqué de l'élimination de  $a$  dans l'égalité donnée  $0 = ax + bx_0$ .

## XII.

### La loi des conséquences des égalités logiques.

Dans le chapitre précédent j'ai exposé les règles pour éliminer de chaque égalité logique (et de chaque problème exprimé à l'aide des égalités) quelques de ses lettres. Mais, outre l'élimination des lettres, les égalités admettent aussi *l'élimination des connaissances*. Cette seconde opération est la généralisation de la première. En effet, la formule connue

$$(0 = Ga + Ha_0) = (0 = GH, 0 = GH_0a + G_0Ha_0)$$

nous montre que pour éliminer de l'égalité donnée  $0 = Ga + Ha_0$  la lettre  $a$ , c'est à dire pour déduire d'elle l'égalité  $0 = GH$ , il faut éliminer de l'égalité donnée les connaissances exprimées par l'égalité  $0 = GH_0a + G_0Ha_0$ . Pareillement chaque résultat de l'élimination des lettres n'est autre chose que le résultat d'élimination de quelques connaissances. Ainsi il n'y a pas de doute, que le problème sur l'élimination des lettres n'est qu'un des cas particuliers du problème plus général sur l'élimination des connaissances.

Pour chaque égalité nous appellerons chaque résultat de l'élimination de quelques des ses connaissances *la conséquence* de cette égalité.

Il est aisé à comprendre que ce même problème sur les conséquences des égalités est encore la généralisation d'un autre problème qui est aussi résolu par nous—du problème sur les formes des égalités. En effet, si les connaissances éliminées de l'égalité donnée sont nulles, la conséquence tirée de cette égalité en ce cas ne peut pas être autre chose que l'une de ses formes.

Vu que chaque conséquence de l'égalité embrasse quelque partie de ses connaissances, nous ne devons pas exclure



les deux cas extrêmes des conséquences: 1°, le cas où les connaissances éliminées sont nulles et 2°, le cas où s'éliminent toutes les connaissances de l'égalité. Dans le premier cas la conséquence est l'une des formes de l'égalité donnée, dans le second nous devons recevoir une égalité sans connaissances, c'est à dire une quelque identité.

Pour épuiser toutes les conséquences possibles de chaque égalité donnée, sans lacunes et réitérations. nous devons chercher les conséquences en forme des déterminations de la même classe  $U$  prise arbitrairement. Dans ce but nous devons prendre l'égalité donnée pour laquelle nous chercherons les conséquences, s'il le faudra, dans la forme la plus générale  $U = UM + U_0M_0$ .

Pour exprimer le rapport qui existe entre une égalité quelconque et l'une de ses conséquences, nous employerons le signe connu  $\therefore$  placé parmi l'égalité donnée et sa conséquence. Ainsi la formule

$$(A=B) \therefore (A=AB)$$

désigne que de l'égalité  $A=B$  se déduit la conséquence  $A=AB$ . Si la conséquence n'est que la forme de l'égalité donnée, le signe  $\therefore$  doit coïncider avec le signe  $=$ .

Pour l'égalité générale  $1=M$  les deux conséquences extrêmes en forme des déterminations de  $U$  sont:

$$(1=M) \therefore (U=UM + U_0M_0), (1=M) \therefore (U=U).$$

La définition des conséquences donnée plus haut nous montre, que, pour construire toutes les conséquences de chaque égalité donnée, il suffit d'y éliminer consécutivement toutes les combinaisons possibles de ses connaissances. Cette méthode, que nous développerons plus loin, ne peut pas nous satisfaire en ce moment, parce qu'elle ne peut pas nous con-

duire à la loi des conséquences, c'est à dire à une formule, qui doit embrasser toutes les conséquences de chaque égalité donnée. Pour atteindre ce but important, nous devons chercher une autre voie. Nous démontrerons dans ce but la série suivante des théorèmes.

*Théorème 1:*

$$(A=B, C=D) \therefore (A+C=B+D).$$

*Démonstration:*

$$\begin{aligned} (A+C=B+D) &= [0=(A+C)B_0D_0 + A_0C_0(B+D)] = \\ &= [0=AB_0D_0 + B_0CD_0 + A_0BC_0 + A_0C_0D], \\ (A=B, C=D) &= (0=AB_0 + A_0B, 0=CD_0 + C_0D) = \\ &= (0=AB_0 + A_0B + CD_0 + C_0D) = (0=AB_0D + AB_0D_0 + \\ &A_0BC + A_0BC_0 + BCD_0 + B_0CD_0 + AC_0D + A_0C_0D), \\ (A=B, C=D) &= (A+C=B+D, \\ &0=AB_0D + A_0BC + BCD_0 + AC_0D). \end{aligned}$$

L'élimination des connaissances  $0 = AB_0D + A_0BC + BCD_0 + AC_0D$  dans la troisième des formules précédentes démontre le théorème. Donc, la somme de deux égalités quelconques est l'une des conséquences de leur système.

L'un des cas particuliers de ce théorème est:

$$(A=B, X=X) \therefore (A+X=B+X).$$

Mais le système  $A=B, X=X$  est toujours équivalent à l'égalité seule  $A=B$ , car l'autre égalité  $X=X$  est une identité, et nous recevons la formule

$$(A=B) \therefore (A+X=B+X), \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

où la classe  $X$  est tout à fait arbitraire. Cette formule nous montre qu'en ajoutant consécutivement aux deux côtés de chaque égalité donnée  $A=B$  une infinité des classes prises arbitrairement nous recevons une infinité de ses conséquences.

Il n'est pas difficile de se convaincre que la conséquence générale  $A + X = B + X$  se déduit de l'égalité donnée  $A = B$  à l'aide de l'omission de ses connaissances  $A + X_0 = B + X_0$ , car la formule:

$$\neg(A=B) = (A + X = B + X, A + X_0 = B + X_0)$$

est une identité.

*Théorème 2:*

$$(A=B, C=D) \therefore (AC=BD).$$

*Démonstration:*

$$\begin{aligned} (AC=BD) &= [0 = AC(B_0 + D_0) + CA_0 + C_0)BD] = \\ &= [0 = AB_0C + ACD_0 + A_0BD = BC_0D), \\ (A=B, C=D) &= (0 = AB_0C + AB_0C_0 + A_0BD + A_0BD_0 + \\ &\quad + ACD_0 + A_0CD_0 + BC_0D + B_0C_0D), \\ (A=B, C=D) &= (AC=BD, 0 = AB_0C_0 + A_0CD_0 + A_0BD_0 + \\ &\quad + B_0C_0D). \end{aligned}$$

L'omission des connaissances  $0 = AB_0C_0 + A_0CD_0 + A_0BD_0 + B_0C_0D$  dans la troisième de ces formules démontre le théorème. Donc, le produit de deux égalités quelconques est l'une des conséquences de leur système. L'un des cas particuliers de ce théorème est:

$$(A=B, Y=Y) \therefore (AY=BY),$$

où, ce qui est la même chose:

$$(A=B) \therefore (AY=BY), \dots \dots \dots (2)$$

où la classe  $Y$  est tout à fait arbitraire. La formule (2) nous montre qu'en multipliant consécutivement les deux côtés de chaque égalité donnée  $A=B$  par une infinité des classes prises arbitrairement nous recevrons une infinité de ses conséquences.

### L'identité évidente

$$(A=B)=(AY=BY, AY_0=BY_0)$$

nous persuade que la conséquence générale  $AY=BY$  se déduit de l'égalité donnée  $A=B$  à l'aide de l'omission de ses connaissances  $AY_0=BY_0$ .

Vu que la Logique Mathématique n'a que les trois opérations élémentaires: l'addition, la multiplication et la négation, et que l'application de la troisième de ces opérations au cas de l'égalité  $A=B$  ne peut nous donner que sa forme  $A_0=B_0$ , nous pouvons dire à présent que nous pouvons épuiser toutes les conséquences possibles de chaque égalité donnée  $A=B$  à l'aide de deux formules (1) et (2).

*Théorème 3:*

$$(A+X=B+X)=(AX_0=BX_0) \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

*Démonstration:*

$$\begin{aligned} (A+X=B+X) &= (0=AB_0X_0+A_0BX_0), \\ (AX_0=BX_0) &= (0=AB_0X_0+A_0BX_0) = (A+X=B+X). \end{aligned}$$

Ce théorème est très important: il nous montre que l'addition de deux côtés de chaque égalité avec quelque classe  $X$  est équivalente à la multiplication de ses deux côtés par la négation de  $X$ , et réciproquement. Cela nous persuade aussi que nous pouvons épuiser toutes les conséquences de chaque égalité  $A=B$  à l'aide d'une seule opération de l'addition (avec les identités) ou à l'aide d'une seule opération de la multiplication (avec les identités), c'est à dire à l'aide d'une des formules (1) et (2).

*Théorème 4:*

$$(A=AB) \therefore [A=A(B+X)] \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

*Démonstration 1:*

$$\begin{aligned} (A=AB) \therefore (A+X=AB+X), \\ (A+X=AB+X)=[0=(A+X)(A_0+B_0)X_0+A_0X_0(AB+X)]= \\ =(0=AB_0X_0)=[A=A(B+X)]. \end{aligned}$$

*Démonstration 2:*

$$\begin{aligned} (A=AB) \therefore (AX_0=ABX_0), \\ (AX_0=ABX_0)=[0=AX_0(A_0+B_0+X)+(A_0+X)ABX_0]= \\ =(0=AB_0X_0)=[A=A(B+X)]. \end{aligned}$$

Théorème (4) nous montre que nous épuiserons toutes les conséquences de chaque *détermination de subordination*  $A=AB$  en substituant la superclasse (logique) de cette détermination  $B$  par ses propres superclasses (identiques).

*Exemple.* De la prémisse „Monsieur  $A$  est un parisien“ nous concluons qu'il est un français, un européen, un homme, un être animé etc.

Il est aisé à se convaincre que la conséquence  $A=A(B+X)$  se déduit de l'égalité  $A=AB$  par l'élimination des connaissances  $A=A(B+X_0)$ .

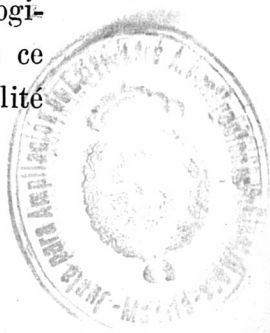
En particulier, pour les valeurs  $X=0$  et  $X=1$  le théorème (4) nous donne les conséquences extrêmes:

$$(A=AB) \therefore (A=AB), (A=AB) \therefore (A=A).$$

Pour les valeurs  $A=1$ ,  $B=M$  le même théorème (4) se transforme dans la formule:

$$(1=M) \therefore (1=M+X), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (I)$$

qui exprime la loi des conséquences des égalités logiques. Il suffit de calculer pour chaque égalité donnée son complet logique tout  $M$ , alors toutes les superclasses (identiques) de ce tout égalées à 1 épuiseront toutes les conséquences de l'égalité donnée.



Il est clair que la conséquence  $1=M+X$  se déduit de l'égalité  $1=M$  par l'omission des connaissances  $1=M+X_0$ .

La formule (I) ne présente que l'une des formes particulières de la loi des conséquences.

*Théorème 5:*

$$(A=A+C) \therefore (A=A+CY) \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

*Démonstration 1:*

$$\begin{aligned} (A=A+C) \therefore (A+Y_0=A+C+Y_0), \\ (A+Y_0=A+C+Y_0)=[0=(A+Y_0)A_0C_0Y+A_0Y(A+C+Y_0)]= \\ =(0=A_0CY)=(A=A+CY). \end{aligned}$$

*Démonstration 2:*

$$\begin{aligned} (A=A+C) \therefore [AY=(A+C)Y], \\ (AY=AY+CY)=[0=CY(A_0+Y_0)]=(0=A_0CY)=(A=A+CY). \end{aligned}$$

Théorème (5) nous montre que toutes les conséquences de chaque *détermination de supériorité*  $A=A+C$  nous épuiserons en substituant la sous-classe (logique) de cette détermination  $C$  par ses propres sous-classes (identiques).

*Exemple.* De la prémisse „Aux contrées peuplées appartient toute l'Europe occidentale“ nous concluons qu'aux telles contrées appartiennent la France, la Normandie etc.

La conséquence  $A=A+CY$  se déduit de l'égalité  $A=A+C$  à l'aide de l'élimination des connaissances  $A=A+CY_0$ .

Pour  $Y=0$  et  $Y=1$  nous recevons les conséquences extrêmes:

$$(A=A+C) \therefore (A=A), (A=A+C) \therefore (A=A+C).$$

Enfin pour les valeurs  $A=0$ ,  $C=N$  nous recevons la formule:

$$(0=N) \therefore (0=NY), \quad . \quad . \quad . \quad (II)$$



qui exprime aussi la loi des conséquences des égalités logiques. Toutes les conséquences de chaque égalité seront épuisées en égalant au zéro toutes les subclasses (identiques) de son complet logique rien.

La conséquence  $0=NY$  se déduit de l'égalité  $0=N$  par l'élimination des connaissances  $0=NY_0$ .

La formule (II) est l'autre forme particulière de la loi générale des conséquences.

*Théorème 6:*

$$(A=AB + A_0C) \therefore [A=A(B+X) + A_0CY] \dots (III)$$

*Démonstration:*

$$\begin{aligned} (A=AB) &\therefore [A=A(B+X)], \\ (A=A+C) &\therefore (A=A+CY), \\ (A=AB, A=A+C) &\therefore [A=A(B+X), A=A+CY], \\ (A=AB, A=A+C) &=(A=AB + A_0C), \\ [A=A(B+X), A=A+CY] &=[A=A(B+X) + A_0CY]. \end{aligned}$$

Ce théorème nous montre que nous épuiserons toutes les conséquences de chaque *détermination bipartible*  $A=AB + A_0C$  en substituant la superclasse de cette détermination  $B$  et la subclasse  $C$  par leurs superclasses et subclasses corrélativement.

La conséquence  $A=A(B+X) + A_0CY$  se déduit de l'égalité  $A=AB + A_0C$  à l'aide de l'élimination des connaissances  $A=A(B+X_0) + A_0CY_0$ .

Pour les deux systèmes des valeurs:  $X=0, Y=1$  et  $X=1, Y=0$  nous recevons les conséquences extrêmes:

$$(A=AB + A_0C) \therefore (A=AB + A_0C), (A=AB + A_0C) \therefore (A=A).$$

Pour la valeur  $C=B$  la formule (III) nous donne:

$$(A=B) \therefore [A=A(B+X) + A_0BY] \dots (IV)$$

Les formules (III) et (IV) sont aussi les formes particulières de la loi générale des conséquences. Elles ne sont pas encore générales parce qu'elles nous donnent les conséquences en forme particulière des déterminations de la fonction donnée  $A$  au lieu de la fonction arbitraire  $U$ .

La conséquence  $A=A(B+X)+A_0BY$  se déduit de l'égalité  $A=B$  à l'aide de l'omission des connaissances  $A=A(B+X_0)+A_0BY_0$ .

*Théorème 7:*

$$(A=B) \therefore [U=U(M+\xi)+U_0N\eta], \quad . \quad . \quad . \quad (V)$$

où est posé comme partout précédemment:

$$M=AB+A_0B_0, \quad N=M_0=AB_0+A_0B$$

et où les trois fonctions  $U$ ,  $\xi$  et  $\eta$  sont tout à fait arbitraires.

*Démonstration:*

$$\begin{aligned} (A=B) &= (U=UM+U_0N) = (U=UM, \quad U=U+N), \\ &\quad (U=UM) \therefore [U=U(M+\xi)], \\ &\quad (U=U+N) \therefore (U=U+N\eta), \\ (A=B) &\therefore [U=U(M+\xi)+U_0N\eta]. \end{aligned}$$

La formule (V) est la plus générale forme de la loi des conséquences. Elle nous donne ses formes particulières (I), (II), (III), et (IV), pour les valeurs correspondantes:

$$\begin{aligned} 1^0, \quad & A=1, \quad B=M, \quad U=1, \quad \xi=X, \\ 2^0, \quad & A=0, \quad B=N, \quad U=0, \quad \eta=Y, \\ 3^0, \quad & B=AB+A_0C, \quad U=A, \quad \xi=X, \quad \eta=Y, \\ 4^0, \quad & U=A, \quad \xi=X, \quad \eta=Y. \end{aligned}$$

La formule (V) nous donne pour chaque égalité donnée  $A=B$  (et pour chaque problème logique exprimé à l'aide des égalités) toutes ses conséquences en forme des déterminations de la fonction prise à volonté  $U$ .

La conséquence  $U = U(M + \xi) + U_0 N \eta$  se déduit de l'égalité  $A = B$  par l'omission des connaissances:

$$U = U(M + \xi_0) + U_0 N r_0.$$

Pour les deux systèmes des valeurs:  $\xi = 0$ ,  $\eta = 1$  et  $\xi = 1$ ,  $\eta = 0$  la formule (V) nous donne les conséquences extrêmes:

$$(A = B) \therefore (U = UM + U_0 N), (A = B) \therefore (U = U).$$

Chacune des déterminations de  $U$  tirées de l'égalité donnée  $A = B$  à l'aide de la formule (V) sera nommée sa *détermination partielle*. En particulier, pour les valeurs  $\xi = 0$ ,  $\eta = 1$  nous recevons la détermination complète qui peut aussi être traitée comme l'une des déterminations partielles.

L'énoncé verbal de la loi des conséquences (V) est: chaque classe arbitraire  $U$  est contenue en toutes les superclasses du complet logique tout de chaque égalité donnée  $A = B$  et contient toutes les subclasses de son complet logique rien. Évidemment cette loi est la généralisation de la loi des formes qui est: chaque classe  $U$  est contenu en le complet logique tout de chaque égalité et contient son complet logique rien.

Ces deux vérités sont tout à fait évidentes, et pour les élever au grade des lois de la Science il ne fallait que les revêtir en les formes dues. Mais, malheureusement, la voie à ce but était entravée par le préjugé que la classe ne peut pas être déterminée à l'aide de son propre symbole ou, encore pis, à l'aide du symbole de sa négation.

Pour finir ce chapitre, donnons encore deux formes de la même loi des conséquences. Vu que

$$U(M + \xi) + U_0 M_0 \eta = U(M + M_0 \xi) + U_0 M_0 \eta = \\ UM + M_0(U\xi + U_0 \eta),$$

nous pouvons poser

$$U\xi + U_0 \eta = \zeta,$$

après quoi la formule (V) devient:

$$(A=B) \therefore (U=UM + M_0\zeta) \quad . \quad . \quad . \quad (VI)$$

ou encore:

$$(A=B) \therefore [U=(U + M_0) (M + \zeta)], \quad . \quad . \quad (VII)$$

où  $\zeta$  est une classe arbitraire. Les formules (VI) et (VII) contiennent pour chaque valeur de  $U$  une seule classe arbitraire au lieu de deux, mais elles cèdent à la formule (V) en ce que leurs significations logiques ne sont pas si évidentes.

### XIII.

**Sur le nombre des conséquences différentes. Démonstration d'un théorème général. La table des conséquences pour l'égalité  $a=b$ .**

Toutes les sept formes de la loi des conséquences renferment les symboles des classes tout à fait arbitraires. Cela nous montre que le nombre des conséquences pour chaque problème exprimé à l'aide des égalités logiques doit être *infini*. Mais si nous excluons toutes les conséquences *secondaires* (qui renferment quelques lettres étrangères au discours et dont le nombre est infini), nous pouvons dire que le nombre des conséquences *principales* (qui sont exprimées à l'aide des lettres du discours seulement) est fini et peut être calculé exactement.

Démontrons que pour chaque égalité ayant  $m$  éléments le nombre total des conséquences principales différentes est égal à  $2^m$ . Nous donnerons les deux démonstrations différentes de cette proposition importante \*).

*Démonstration* 1. Si le problème donné  $1=M$  a le nombre  $m$  des éléments, alors la fonction  $M_0$  doit se décomposer en la somme des  $m$  minimaux différents du discours et doit par conséquent

---

<sup>1)</sup> Dans le chapitre XX nous rencontrerons la troisième démonstration de la même vérité.

avoir le nombre  $2^m$  des subclasses identiques. Prenons à présent la forme (VI) de la loi des conséquences qui nous montre que toutes les conséquences de l'égalité  $1=M$  sont renfermées dans le schème  $U=UM+M_0\zeta$ . Vu que la classe arbitraire  $\zeta$  doit être la fonction des  $n$  lettres du discours seulement, il est évident que pour toutes les  $2^n$  valeurs possibles de  $\zeta$  le produit  $M_0\zeta$  ne peut nous fournir que toutes les  $2^m$  subclasses possibles de la fonction  $M_0$ . La proposition est démontrée.

*Démonstration 2.* La même vérité peut être démontrée encore indépendamment des formules qui expriment la loi des conséquences. En effet, nous savons que chaque conséquence est le résultat de l'élimination dans le problème donné des quelques de ses connaissances. Mais si l'égalité a le nombre  $m$  des éléments, elle a aussi le nombre  $m$  des connaissances élémentaires. Donc le nombre total des combinaisons différentes de ces  $m$  connaissances et par conséquent le nombre total des éliminations possibles des connaissances doit être précisément égal à  $2^m$ .

Il est à observer, que quoique toutes les  $2^m$  conséquences du problème  $M=1$  (ayant  $m$  éléments) présentées en forme des déterminations d'une même fonction  $U$  prise arbitrairement sont les égalités tout à fait différentes (non-équivalentes), mais elles nous donnent pour chaque valeur de  $U$  le nombre  $2^m$  des classes qui sont égales à cette valeur de  $U$  logiquement grâce à l'égalité donnée  $M=1$ .

Pour montrer cela avec évidence, prenons de nouveau la forme (VI) de la loi des conséquences, c'est à dire la formule  $U=UM+M_0\zeta$ . Ici le produit des membres  $UM$  et  $M_0\zeta$  est égal identiquement au zéro. Donc, ces deux membres sont disjonctifs, c'est à dire n'ont pas des subclasses communes (outre 0). Pour cette cause le membre  $UM$  n'a parmi ses subclasses aucuns des zéros logiques du problème. Mais l'autre

membre  $M_0\zeta$  doit nous fournir pour toutes les valeurs de  $\zeta$  toutes les  $2^m$  subclasses de  $M_0$ , c'est à dire tous les  $2^m$  zéros logiques du problème. S'il en est ainsi, nous pouvons déduire toutes les  $2^m$  conséquences du problème trouvées par la formule  $U = UM + M_0\zeta$  d'une seule conséquence  $U = UM$  à l'aide des additions de la fonction  $UM$  avec tous les  $2^m$  zéros logiques du problème. Cela nous persuade que toutes les  $2^m$  fonctions qui se renferment dans la somme  $UM + M_0\zeta$  doivent être logiquement égales les unes aux autres grâce à l'égalité  $M_0 = 0$ . Donc quoique les deux conséquences quelconques  $U = UM + M_0\zeta'$  et  $U = UM + M_0\zeta''$  sont les égalités non-équivalentes, les deux fonctions  $UM + M_0\zeta'$  et  $UM + M_0\zeta''$  doivent être logiquement égales et nous donnent la vraie égalité  $UM + M_0\zeta' = UM + M_0\zeta''$ .

A présent, vu que 1<sup>o</sup>, la fonction arbitraire  $U$  peut admettre le nombre  $2^2$  des valeurs différentes qui sont toutes les classes du discours et que, 2<sup>o</sup>, la formule (VI) nous donne pour chaque valeur spéciale de  $U$ , par exemple pour  $U = A$ , le nombre  $2^m$  des classes logiquement égales à  $A$  grâce à l'égalité donnée  $1 = M$ , nous pouvons proposer ce théorème évident sans les démonstrations ultérieures: chaque égalité donnée  $1 = M$  ayant  $m$  éléments et  $n$  lettres divise toutes les  $2^2$  classes du discours en le nombre  $2^{2-n-m}$  des groupes dont chacune consiste des  $2^m$  classes qui sont, grâce à l'égalité  $1 = M$ , logiquement égales les unes aux autres.

S'il en est ainsi, il est clair que nous pouvons construire pour chaque problème donné  $1 = M$  la table des conséquences principales qui nous donnera toutes ses conséquences en toutes leurs formes. La méthode de construction de telles tables pour les égalités différentes sera manifeste, quand nous exposerons les méthodes pour recevoir toutes les conséquences. En ce moment ce qui nous intéresse le plus—c'est l'idée même de la

possibilité de recevoir les conséquences des égalités par la manière machinale à l'aide des tables.

Voici par exemple la table des conséquences principales pour le problème  $a=b$ :

$a$	$a_0$	1	0
$b$	$b_0$	$a_0 + b$	$ab_0$
$ab$	$a_0 b_0$	$a + b_0$	$a_0 b$
$a + b$	$a_0 + b_0$	$ab + a_0 b_0$	$ab_0 + a_0 b$

La construction de cette table sera exécuté dans le chapitre XVI.

Le problème  $a=b$  a les deux lettres  $a$  et  $b$  et les deux éléments qui sont:  $0=ab_0$  et  $0=a_0b$ . Les nombres  $n$  et  $m$  sont en ce cas égaux à 2. Le nombre des différentes conséquences principales ( $2^m$ ) est 4. Le nombre total des classes différentes du discours ( $2^2$ ) est 16. Toutes ces 16 classes doivent se diviser, grâce à l'égalité  $a=b$ , en les quatre ( $2^{2-m}$ ) groupes avec les quatre ( $2^m$ ) classes logiquement égales dans la chacune. La table précédente contient dans chaque sa colonne toutes les classes de la même groupe. Mais elle peut aussi nous donner toutes les conséquences principales du problème  $a=b$ . Pour cela il suffit d'égaliser consécutivement la classe prise pour  $U$  à chacune des classes de la groupe à laquelle appartient cette  $U$ . Par exemple. en forme des déterminations de  $a$  toutes les quatre conséquences du problème  $a=b$  sont:

$$a=a, a=b, a=ab, a=a+b;$$

en forme des déterminations de  $a+b$  elles sont:

$$a+b=a, a+b=b, a+b=ab, a+b=a+b;$$

en forme des déterminations de  $a_0 b_0$  elles sont:

$$a_0 b_0=a_0, a_0 b_0=b_0, a_0 b_0=a_0 b_0, a_0 b_0=a_0 + b_0.$$



Et ainsi de suite. Vu que chaque des conséquences principales de l'égalité  $a=b$  peut avoir le nombre 16 des formes principales, le nombre total des toutes les conséquences principales dans toutes leurs formes est égal en ce cas à 64, et la table précédente peut nous fournir toutes ces 64 conséquences.

#### XIV.

##### Sur les quatre conséquences cardinales.

Parmi les  $2^m$  conséquences principales qui existent pour chaque égalité ayant  $m$  éléments il y en a quatre que nous pouvons construire en ne connaissant ni la loi générale des conséquences, ni le nombre et les valeurs des éléments de l'égalité donnée. Ces quatre conséquences principales seront nommées *cardinales*.

Pour le problème  $1=M$  ses conséquences cardinales sont: 1°, les deux conséquences extrêmes  $U=U$ ,  $U=UM+U_0M_0$  et 2° les deux égalités  $U=UM$ ,  $U=U+M_0$  qui présentent un système équivalent à l'égalité donnée  $1=M$  et à l'égalité précédente  $U=UM+U_0M_0$ . Ainsi les quatre conséquences cardinales du problème  $1=M$  sont:

$$U=U, U=UM+U_0M_0, U=UM, U=U+M_0 \dots (1)$$

La première de ces quatre formules est la conséquence qui ne contient aucune des connaissances du problème et n'a aucun contenu logique; elle présente la détermination de  $U$  que nous pouvons nommer *identique*.

La seconde formule  $U=UM+U_0M_0$  embrasse toutes les connaissances du problème, est équivalente à ce problème et nous donne la détermination de  $U$  que nous avons déjà nommée *complète*.

La troisième formule  $U=UM$  et la quatrième  $U=U+M_0$  prises ensemble embrassent aussi toutes les connaissances du



$U=U+M_0$ , c'est à dire les deux des ses déterminations cardinales. Voilà pourquoi nous pouvons dire que la formule  $U=UM$  est la *détermination compacte* de  $U$  (débarassée totalement des zéros logiques du problème) et la formule  $U=U+M_0$  nous présente la *détermination détaillée* de  $U$  (contenant tous les zéros logiques du problème).

Il peut sembler d'étrange que la détermination complète n'est ni détaillée, ni compacte, mais contient quelques des zéros logiques du problème. Pour dissiper à cet égard toutes les doutes, il faut observer ce qui suit. Tous zéros logiques du problème  $M_0=0$  nous peuvent se diviser en deux groupes: les zéros de l'égalité  $UM_0=0$  et les zéros de l'égalité  $U_0M_0=0$ . On peut démontrer que l'addition des zéros de la première sorte au membre droit de l'égalité  $U=UM$  diminue le contenu logique de cette égalité, tandis que l'addition des zéros de la seconde sorte augmente le contenu mentionné. Cela suit des calculs:

$$\begin{aligned}(U=UM) &= (0=UM_0), \\ (U=UM+XUM_0) &= [U=U(M+X)] = (0=UM_0X_0), \\ (U=UM+yU_0M_0) &= (0=UM_0+yU_0M_0).\end{aligned}$$

Ces caleuls nous montrent en outre que l'addition de  $UM$  dans l'égalité  $U=UM$  avec  $XUM_0$  est équivalente à l'élimination de cette égalité des connaissances  $XUM_0=0$  et que l'addition de  $UM$  dans la même égalité  $U=UM$  avec  $yU_0M_0$  est équivalente à la jonction des connaissances  $U=UM$  avec les connaissances  $yU_0M_0=0$ . Donc l'addition de  $UM$  dans l'égalité  $U=UM$  avec  $U_0M_0$  transforme la détermination compacte dans la détermination complète, après quoi l'addition ultérieure avec  $UM_0$  transforme la détermination complète dans la détermination détaillée. Conformément à ces explications, nous voyons aussi que l'égalité  $U=UM+UM_0=U$  n'a aucun

contenu logique. En ce cas l'addition de  $UM$  avec  $UM_0$  est équivalente à l'élimination de l'égalité  $U=UM$  des connaissances  $0=UM_0$ . c'est à dire de toutes ses connaissances.

Il est à observer que pour quelques valeurs de  $U$  le nombre des conséquences cardinales du problème générale  $1=M$  est deux, au lieu de quatre. Cela nous voyons par exemple pour les valeurs  $U=1$  et  $U=0$ . Dans le premier de ces cas la détermination complète  $1=M$  est aussi la détermination compacte, tandis que la détermination identique  $1=1$  coïncide avec la détermination détaillée qui est  $1=1+M_0$ . Dans le second des mêmes cas, au contraire, la détermination complète  $0=M_0$  coïncide avec la détermination détaillée  $0=0+M_0$  et la détermination identique  $0=0$  est en même temps la détermination compacte  $0=0.M$ . Généralement, le nombre des conséquences cardinales est deux au lieu de quatre pour toutes les valeurs de  $U$ , pour lesquelles tous les éléments du problème sont ou les éléments de supériorité de  $U$ , ou les éléments de sa subordination. En tous ces cas le nombre des conséquences principales restantes, c'est à dire non-cardinales, n'est plus  $2^m-4$ , mais il est  $2^m-2$ .

Pour terminer ce chapitre, disons encore ce qui suit. Quoique nous pouvons trouver les quatre conséquences cardinales sans l'aide de la loi générale des conséquences, mais il ne sera pas superflu de les déduire aussi de l'expression de la loi mentionnée. Nous avons vu plus haut, comment elles peuvent être déduites de la formule (VI). De la formule (V) qui est  $U=U(M+\xi)+U_0M_0\eta$  les conséquences cardinales se déduisent par exemple à l'aide des changements de  $\xi$  et de  $\eta$  corrélativement: en 1 et en 0, ou encore en  $M_0$  et en  $M$ , la détermination identique  $U=U$ ; en 0 et en 0, ou encore en  $M$  et en  $M$ , la détermination compacte  $U=UM$ ; en 1 et en 1, ou encore en  $U$  et en  $U_0$ , la détermination détaillée

$U=U+M_0$ ; enfin en 0 et en 1, ou encore en  $M$  et en  $U_0$ , la détermination complète  $U=UM+U_0M_0$ .

### XV.

#### Encore une forme de la loi des conséquences et quelques mots à cette occasion.

Prenons le problème logique général  $1=M$ . L'une des conséquences est l'égalité  $U=UM$  qui nous montre que chaque classe du discours est l'une des subclasses logiques de la fonction  $M$ , c'est à dire du complet tout logique du problème donné. Mais parmi les classes du discours se trouve aussi la classe  $M$ . Cela nous persuade que le complet logique tout  $M$  est la plus petite des superclasses logiques communes à toutes les classes du discours.

D'un autre côté, l'une des conséquences du même problème  $1=M$  est aussi l'égalité  $U=U+M_0$  qui nous montre que chaque classe du discours est l'une des superclasses logiques de la fonction  $M_0$  qui est le complet rien logique du problème donné. Mais parmi les classes du discours se trouve aussi la classe  $M_0$ . D'où nous concluons que le complet rien logique  $M_0$  est la plus grande des subclasses logiques communes à toutes les classes du discours.

Mais pour chaque classe *séparée*, c'est à dire pour chaque valeur spéciale de  $U$ , nous pouvons indiquer sa superclasse logique qui est plus petite que  $M$  et sa subclasse logique qui est plus grande que  $M_0$ . En effet, l'égalité  $U=UM$  nous montre que la classe  $UM$ , qui est identiquement plus petite que  $M$  et que  $U$ , est égale logiquement à  $U$  et par conséquent est aussi l'une des superclasses logiques de  $U$ . Pareillement, l'égalité  $U=U+M_0$  nous montre que la classe  $U+M_0$ , qui est identiquement plus grande que  $M_0$  et que  $U$ , est égale logiquement à  $U$  et par conséquent est l'une des sub-

classes logiques de  $U$ . Donc pour la classe séparée  $U$  la plus petite de ses superclasses logiques est non pas  $M$ , mais  $UM$ , et la plus grande de ses subclasses logiques est non pas  $M_0$ , mais  $M_0 + U$ .

Or parmi quelques déterminations de subordination de la même classe  $U$  la plus conforme à sa destination (la plus exacte et riche de contenu) est celle où la superclasse déterminante est la plus petite, comme cela nous montre la comparaison de la pleine égalité  $U=UM$  et de la formule de ses parties (conséquences)  $U=U(M+\xi)$ . Pareillement, parmi quelques déterminations de supériorité de la même classe  $U$  la plus parfaite est celle, où la subclasse déterminante est la plus grande, comme nous le montre la comparaison de la pleine égalité  $U=U+M_0$  et de la formule de ses parties (conséquences)  $U=U+M_0\gamma$ .

Sous ce point de vue la détermination  $U=U(UM)$  doit être préférée à la détermination  $U=UM$  et la détermination  $U=U+(U+M_0)$  doit être préférée à la détermination  $U=U+M_0$ . Vu que les fonctions  $U(UM)$  et  $U+(U+M_0)$  sont identiquement égales à  $UM$  et à  $U+M_0$  corrélativement, ledit changement des formules est pleinement permis. Ainsi la loi des formes  $U=UM+U_0M_0$  peut être représentée par la formule  $U=U(MU)+U_0(U+M_0)$  et nous pouvons exprimer la loi des conséquences  $U=U(M+\xi)+U_0M_0\gamma$  par la formule  $U=U(UM+\xi)+U_0(U+M_0)\gamma$ .

Supposons à présent qu'après les simplifications possibles le produit  $UM$  se réduit à  $A$  et la somme  $U+M_0$  se réduit à  $B$ . Les deux lois précédentes deviennent:

$$U=UA+U_0B \text{ et } U=U(A+\xi)+U_0B\gamma \quad . \quad . \quad (1)$$

Pour une autre fonction  $V$  prise au lieu de  $U$  nous aurions:

$$V=VA'+V_0B' \text{ et } V=V(A'+\xi)+V_0B'\gamma,$$

où  $A' = VM$ ,  $B' = V + M_0$ . Cela nous montre que les deux simples et générales lois de la Logique peuvent, grâce aux soins exagérées pour l'exactitude, être dégradées jusqu'au niveau des règles dont l'énoncé est vague et confus. Si nous connaissons déjà les lois mentionnées en leurs formes expressives:

$$U = UM + U_0M_0 \text{ et } U = U(M + \xi) + U_0M_0\eta, \quad . \quad . \quad (2)$$

la possession des formules (1) ne peut être qu'utile. Mais si cela n'est pas, la découverte des formules (1), qui atteignent son but d'une manière satisfaisante, peut barrer pour nous le chemin aux lois mentionnées (2).

L'une des ces éventualités désagréables j'ai éprouvé moi-même. En 1884 j'ai publié les règles:

$$(1 = M) = [1 = aM(1) + a_0M(0)] = [a = aM(1) + a_0M_0(0)],$$

$$(1 = M) = [1 = MU + MU_0 = UA + U_0B] = (U = UA + U_0B_0),$$

qui ne sont que les formes spéciales de la loi de l'équivalence, mais la plus parfaite forme de cette loi  $U = UM + U_0M_0$  et son interprétation logique sont restées pour moi inconnues pour longtemps.

## XVI.

**La première méthode pour construire toutes les conséquences de l'égalité donnée—l'élimination des connaissances. Les conséquences du problème  $a = b$ .**

Nous savons que toutes les conséquences principales de chaque égalité logique  $1 = M$  sont les résultats de l'élimination dans cette égalité des quelques des ses connaissances. Pour épuiser à l'aide des telles éliminations toutes les conséquences du problème en forme des déterminations de la fonction  $U$  prise arbitrairement, il faut d'abord trouver tous les  $m$  élé-



ments du problème en forme mentionnée et puis éliminer toutes leurs combinaisons dans l'égalité donnée  $1=M$  réduite à sa forme  $U=UM+U_0M_0$ .

Nous savons aussi que pour décomposer en éléments l'égalité  $U=UM+U_0M_0$ , il faut décomposer la fonction  $M$  en les maximaux du discours et la fonction  $M_0$  en ses minimaux. Mais si le problème donné  $1=M$  a le nombre  $m$  des éléments, la fonction  $M$  doit avoir le nombre  $m$  des maximaux et la fonction  $M_0$ —le nombre  $m$  des minimaux. Donc, il peut sembler que la décomposition complète de la formule  $U=UM+U_0M_0$  doit fournir à nous le nombre  $2m$  des éléments en forme de déterminations de  $U$ . Mais il est évident qu'après les simplifications possibles ce nombre  $(2m)$  doit se réduire à sa moitié, car le nombre des éléments de l'égalité ne peut pas dépendre de ses formes.

Pour dissiper à cet égard toutes les doutes, nous démontrons cette vérité directement.

Supposons que tous les  $m$  minimaux de la fonction  $M_0$  sont:  $k^{(1)}, k^{(2)}, k^{(3)}, \dots, k^{(m)}$ . Alors tous les  $m$  maximaux de la fonction  $M$  seront:  $k_0^{(1)}, k_0^{(2)}, k_0^{(3)}, \dots, k_0^{(m)}$ . Donc, la décomposition complète du problème donné  $U=UM+U_0M_0$  sera:

$$U=Uk_0^{(1)}k_0^{(2)}\dots k_0^{(m)}+U_0(k^{(1)}+k^{(2)}+\dots+k^{(m)}),$$

ce qui nous donne le nombre  $2m$  des égalités élémentaires:

$$\begin{aligned} U &= Uk_0^{(1)}, \quad U=Uk_0^{(2)}, \dots, \quad U=Uk_0^{(m)}, \\ U &= U+k^{(1)}, \quad U=U+k^{(2)}, \dots, \quad U=U+k^{(m)}. \end{aligned}$$

Démontrons que pour chaque valeur de  $U$  la moitié, c'est à dire les  $m$  des ces égalités sont les identités. Pour cela il suffit de dévoiler que dans chaque paire des égalités

$$U=Uk_0^{(i)}, \quad U=U+k^{(i)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

l'une est nécessairement l'identité et l'autre est inmanquablement différente de l'identité.

Vu que la somme  $U + U_0$  est égale à l'unité, le minimal  $k^{(i)}$  qui est l'un des zéros logiques du problème doit appartenir au nombre des minimaux ou de la fonction  $U$ , ou de la fonction  $U_0$ . Ces deux cas seront considérés séparément.

Dans le premier cas, où le minimal  $k^{(i)}$  est contenu en  $U$  identiquement, la seconde de deux égalités (1) est évidemment une identité et il ne nous reste que de montrer que la première est différente de l'identité. Cela suit de ce que si l'égalité  $U = U + k^{(i)}$  est une identité, alors l'égalité  $U_0 = U_0 k_0^{(i)}$  étant équivalente à la première, est aussi une identité; donc  $k_0^{(i)}$  est l'un des maximaux de la fonction  $U_0$  et par conséquent ce  $k_0^{(i)}$  ne peut pas se trouver parmi les maximaux de la fonction  $U$ , d'où nous concluons que l'égalité  $U = U k_0^{(i)}$  est une égalité différente de l'identité.

Dans le second cas, où le minimal  $k^{(i)}$  est contenu identiquement en  $U_0$ , le maximal  $k_0^{(i)}$  doit se trouver parmi les maximaux de la fonction  $U$  et la première de deux égalités (1) est une identité. Alors la seconde doit être différente de l'identité, car le minimal  $k^{(i)}$  n'appartient pas au nombre des minimaux de  $U$ .

Pour éviter la nécessité de faire les réductions ci-indiquées dans la décomposition complète de l'égalité  $U = UM + U_0 M_0$ , nous pouvons offrir la méthode suivante: décomposer en les minimaux les deux fonctions  $M_0$  et  $U$ ; alors chaque minimal  $k^{(i)}$  de  $M_0$  qui se trouve parmi les minimaux de  $U$  nous donnera l'égalité élémentaire  $U = U k_0^{(i)}$  et chaque minimal  $k^{(i)}$  de  $M_0$  qui n'appartient pas au nombre des minimaux de  $U$  nous donnera l'égalité élémentaire  $U = U + k^{(i)}$ . En supposant que les minimaux communs aux fonctions  $M_0$  et  $U$  en nombre  $m - s$  sont:  $p_0^{(1)}, p_0^{(2)}, \dots, p_0^{(m-s)}$  et les  $s$  restantes minimaux de

$M_0$  sont:  $q^{(1)}, q^{(2)}, \dots, q^{(s)}$ , nous aurons le système des éléments du problème donné:

$$\left. \begin{aligned} U &= Up^{(1)}, U = Up^{(2)}, \dots, U = Up^{(m-s)} \\ U &= U + q^{(1)}, U = U + q^{(2)}, \dots, U = U + q^{(s)} \end{aligned} \right\} \dots \quad (2)$$

et la décomposition de l'égalité  $U = UM + U_0 M_0$  équivalente à ce problème sera:

$$U = Up^{(1)}p^{(2)} \dots p^{(m-s)} + U_0[q^{(1)} + q^{(2)} + \dots + q^{(s)}], \dots \quad (3)$$

où toutes les simplifications possibles sont déjà effectuées.

Lorsque le problème donné  $1 = M$  est réduit à sa forme (3), l'élimination des connaissances se fait ainsi: pour éliminer du problème la connaissance exprimée par l'élément  $U = Up^{(i)}$  il suffit de changer en (3) le facteur  $p^{(i)}$  en 1; pour y éliminer la connaissance élémentaire  $U = U + q^{(l)}$  il suffit de changer en (3) le membre  $q^{(l)}$  en 0.

*Exemple.* Construisons la table des conséquences donnée sans démonstrations dans le chapitre XIII pour le problème  $a=b$ .

En ce cas le nombre  $n$  des lettres du discours est égal à 2 et le nombre  $m$  des éléments du problème est aussi égal à 2. Toutes les  $16$  ( $2^{2^n}$ ) classes du discours doivent se diviser en quatre ( $2^{2-m}$ ) groupes avec quatre ( $2^m$ ) classes logiquement égales entre elles dans la chacune.

Nous trouverons d'abord, d'après la méthode de ce chapitre, toutes les quatre conséquences du problème en forme des déterminations de la classe  $ab_0$ . Les décompositions en minimaux des fonctions  $M_0$  et  $U$  sont:

$$M_0 = ab_0 + a_0 b, \quad U = ab_0.$$

L'un des minimaux de  $M_0$  est commun à ces deux fonctions, l'autre ne l'est pas. Donc en forme désirable des déterminations de  $ab_0$  les deux éléments du problème sont:



$$ab_0 = ab_0(a_0 + b), \quad ab_0 = ab_0 + a_0b. \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

et la détermination complète de  $ab_0$  sera:

$$ab_0 = ab_0(a_0 + b) + (a_0 + b)a_0b \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Il ne nous reste que d'éliminer de la formule (5) toutes les combinaisons des éléments (4).

Le résultat de non-élimination des connaissances sera:

$$ab_0 = ab_0(a_0 + b) + (a_0 + b)a_0b = a_0b.$$

Le résultat de l'élimination de la première des connaissances (4) est:

$$ab_0 = ab_0. \quad 1 + (a_0 + b)a_0b = ab_0 + a_0b.$$

L'élimination de la seconde des connaissances (4) nous donne:

$$ab_0 = ab_0(a_0 + b) + (a_0 + b). \quad 0 = 0.$$

Enfin le résultat de l'élimination des toutes les deux connaissances (4) est:

$$ab_0 = ab_0. \quad 1 + (a_0 + b). \quad 0 = ab_0.$$

Les quatre classes logiquement égales à  $ab_0$  grâce à l'égalité  $a=b$  sont:  $a_0b$ ,  $ab_0 + a_0b$ ,  $0$  et  $ab_0$ . Elles composent l'une des quatre colonnes de la table que nous avons à construire.

Les classes d'une autre colonne se trouvent en prenant pour  $U$  l'une des classes qui n'entrent pas dans la colonne trouvée, par exemple la classe  $a_0$ . Vu qu'en ce cas

$$M_0 = ab_0 + a_0b, \quad U = a_0b + a_0b_0,$$

les éléments du problème en forme des déterminations de  $a_0$  sont:

$$a_0 = a_0(a + b_0), \quad a_0 = a_0 + ab_0 \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

et la détermination complète de  $a_0$  est:

$$a_0 = a_0(a + b_0) + a. \quad ab_0 \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Il ne reste que d'éliminer les connaissances (6) dans l'égalité (7).

Le resultat de non-élimination des connaissances est:

$$a_0 = a_0(a + b_0) + a. \quad ab_0 = a_0b_0 + ab_0 = b_0.$$

L'élimination de la première des connaissances (6) donne:

$$a_0 = a_0. \quad 1 + a. \quad ab_0 = a_0 + ab_0 = a_0 + b_0.$$

Le résultat de l'élimination de la seconde des connaissances (6) est:

$$a_0 = a_0(a + b_0) + a. \quad 0 = a_0b_0.$$

Enfin, en éliminant toutes les deux connaissances (6) à la fois, nous aurons:

$$a_0 = a_0. \quad 1 + a. \quad 0 = a_0.$$

Par conséquent la seconde colonne de la table des conséquences de l'égalité  $a=b$  contient les quatre classes logiquement égales:  $b_0$ ,  $a_0 + b_0$ ,  $a_0b_0$  et  $a_0$ .

Vu que la méthode de ce chapitre est suffisamment illustrée par ce qui précède, les deux colonnes restantes de la même table seront construites à l'aide de quelques autres considérations.

Les classes de la troisième colonne se trouvent en construisant les quatre déterminations cardinales. En tel cas il faut choisir pour  $U$  une classe qui, étant différente des classes des deux premières colonnes, nous donnerait l'un élément de sa subordination et l'un de sa supériorité. L'une des telles classes est  $a$  par exemple. Vu qu'en ce cas:

$$U=a, \quad M=ab + a_0b_0, \quad M_0=ab_0 + a_0b,$$

les quatre déterminations cardinales de  $a$  seront:

$$a=a, \quad a=aM=ab, \quad a=a + M_0=a+b, \quad a=aM + a_0M_0=b.$$

Donc la troisième colonne de la table embrasse les classes logiquement égales:  $a$ ,  $ab$ ,  $a+b$  et  $b$ .

Enfin les classes de la dernière colonne se trouvent en prenant les négations des classes de la première colonne, ce qui nous donne les classes logiquement égales:  $a+b_0$ ,  $ab+a_0b_0$ , 1 et  $a_0+b$ .

La construction de la table proposée sans démonstrations dans le chapitre XIII est finie.

## XVII.

**La seconde méthode pour le même but—les combinaisons des connaissances élémentaires. Les conséquences des prémisses du syllogisme Barbara.**

Il est évident que si le problème donné  $1=M$  est décomposé en ses éléments, alors toutes les combinaisons de ces éléments doivent présenter toutes les conséquences du problème.

Appliquons cette méthode au cas du syllogisme Barbara dont le schème est:

$$(a=ab, b=bc) \therefore (a=ac).$$

Nous trouverons toutes les conséquences des prémisses de ce syllogisme en forme des déterminations de  $a$  et nous démontrerons ainsi que la conclusion  $a=ac$  donnée par ce syllogisme n'est point unique.

Une égalité équivalente au système des prémisses données  $a=ab$ ,  $b=bc$  est:

$$0=ab_0+bc_0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Les quatre éléments de ce problème évidemment sont:

$$0=ab_0c, 0=ab_0c_0, 0=abc_0, 0=a_0bc_0,$$

ou en forme des déterminations de  $a$ :

$$a=a(b+c_0), a=a(b+c), a=a(b_0+c), a=a+bc_0 \quad . \quad . \quad (2)$$

Le problème doit avoir les 16 conséquences principales et une infinité des conséquences secondaires. Nous trouverons les 16 déterminations principales de  $a$  à l'aide des combinaisons des éléments (2).

La détermination sans éléments (et sans contenu) est  $a=a$ .

Les quatre déterminations avec un seul élément sont les éléments mêmes (2).

Les six déterminations avec deux éléments chacune sont:

$$a=a(b+c_0)(b+c)=ab,$$

$$a=a(b+c_0)(b_0+c)=a(bc+b_0c_0),$$

$$a=a(b+c_0)+a_0bc_0=bc_0+a(bc+b_0c_0),$$

$$a=a(b+c)(b_0+c)=ac,$$

$$a=a(b+c)+a_0bc_0=bc_0+ac,$$

$$[a=a(b_0+c)+a_0bc_0]=(bc_0=0).$$

Ici la première formule est la première prémisse du problème et en même temps le résultat de l'élimination du problème de la lettre  $c$ . La quatrième formule est la conclusion du syllogisme et en même temps le résultat de l'élimination du problème de la lettre  $b$  (du terme moyen du syllogisme). La sixième formule est la détermination fictive de  $a$ , le résultat masqué de l'élimination du problème de la lettre  $a$  et en même temps la seconde prémisse du syllogisme. La seconde formule est l'une des déterminations de subordination de  $a$ . La cinquième formule est la détermination intermédiaire de  $a$  qui nous montre que les diverses  $a$  contiennent tout  $bc_0$  et les parties diverses de  $c$ . Enfin, la formule troisième est aussi l'une des déterminations intermédiaires de  $a$ .

Les quatre déterminations de  $a$  avec trois éléments chacune sont:



$$\begin{aligned}
 a &= a(b + c_0)(b + c)(b_0 + c) = abc, \\
 a &= a(b + c_0)(b + c) + a_0bc_0 = ab + a_0bc_0 = bc_0 + abc, \\
 [a &= a(b + c_0)(b_0 + c) + a_0bc_0] = (a = abc + a_0bc_0 + a_0bc_0) = \\
 &= [a = a(bc + b_0c_0), 0 = bc_0], \\
 [a &= a(b + c)(b_0 + c) + a_0bc_0] = (a = ac + a_0bc_0) = (a = ac, bc_0 = 0).
 \end{aligned}$$

Ici la première formule est la détermination compacte de  $a$  (la combinaison de tous ses éléments de subordination). La seconde est une détermination intermédiaire. Les deux formules restantes sont les déterminations bipartibles de  $a$  et en même temps ce sont les déterminations de subordination de  $a$  liées avec les connaissances qui ne se rapportent point à cette classe.

Enfin la combinaison de tous les quatre éléments du problème nous donne la détermination complète de  $a$ :

$$a = a(b + c_0)(b + c)(b_0 + c) + a_0bc_0 = abc + a_0bc_0 \quad . \quad . \quad (3)$$

qui est équivalente au système  $a = abc, 0 = bc_0$ .

Quant à la détermination détaillée de  $a$  qui doit embrasser tous ses éléments de supériorité, elle coïncide en notre cas avec l'élément seul  $a = a + bc_0$ .

Toutes les 16 déterminations de  $a$  trouvées plus haut nous permettent d'écrire la série des égalités:

$$\begin{aligned}
 a &= a(b + c_0) = a(b + c) = a(b_0 + c) = a + bc_0 = ab = a(bc + b_0c_0) = \\
 &= bc_0 + a(bc + b_0c_0) = ac = bc_0 + ac = a(b_0 + c) + a_0bc_0 = abc = \\
 &= bc_0 + abc = a(bc + b_0c_0) + a_0bc_0 = ac + a_0bc_0 = abc + a_0bc_0.
 \end{aligned}$$

Outre les 16 déterminations principales de  $a$ , les prémisses du syllogisme Barbara admettent encore une infinité des déterminations secondaires de cette classe. Pour trouver l'une quelconque des telles déterminations, prenons la loi générale des conséquences en sa forme (VI), c'est à dire la formule  $U = UM + M_0\zeta$ , et posons  $U = a$ ,  $\zeta = d$ , où  $d$  est une lettre étrangère au problème. Vu qu'en ce cas  $M_0 = ab_0 + bc_0$ ,  $M = a_0b_0 + bc$ , nous aurons:

$$a = a(a_0 b_0 + bc) + d(ab_0 + bc_0) = a(bc + b_0 d + bc_0 d) + a_0 bc_0 d.$$

La comparaison de cette formule avec la détermination complète de  $a$  (3) nous montre qu'effectivement la première n'est que l'une des conséquences de la seconde, car les coefficients de  $a$  et de  $a_0$  dans la première sont corrélativement l'une des superclasses et l'une des subclasses des coefficients correspondants dans la seconde.

### XVIII.

**La troisième méthode pour le même but—les complications de la détermination compacte à l'aide des zéros logiques. Les conséquences de l'égalité  $0 = ax + bx_0$ .**

Nous savons que dans chaque problème  $1 = M$  la détermination compacte  $U = UM$  de chaque fonction  $U$  prise arbitrairement est toujours exempte des zéros logiques du problème. Par cette raison, en égalant à  $U$  toutes les sommes de  $UM$  avec tous les zéros logiques du problème, nous épuiserons toutes ses conséquences principales. Cette méthode est basée sur l'emploi de la forme (VI) de la loi des conséquences qui est  $U = UM + M_0 \zeta$ . Tous les zéros logiques du problème peuvent être calculés d'après la forme (II) de la même loi qui est  $0 = M_0 Y$ .

Cette méthode nous donne les conséquences du problème en deux formes à la fois: en forme des déterminations de la classe zéro et en forme des déterminations de la classe  $U$  prise arbitrairement.

*Exemple.* Cherchons en forme des déterminations de  $x$  toutes les conséquences de l'égalité

$$0 = ax + bx_0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

qui est traitée par  $M$ . Schröder comme la forme la plus générale des „équations“ logiques. Quoique les classes  $a$  et  $b$  sont sup-

posées d'être les fonctions quelconques indépendantes de la lettre  $x$ , mais tant que les expressions de ces fonctions ne nous sont pas données, nous devons les considérer comme les simples lettres du discours, aussi bien que le symbole  $x$ .

Les quatre éléments du problème (1) sont:

$$0=abx, 0=ab_0x, 0=abx_0, 0=a_0bx_0 \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Le nombre ( $2^m$ ) des conséquences principales de ce problème est 16. Tous ses 16 zéros logiques trouvés par la méthode de combinaison des éléments sont:

$$\begin{aligned} 0 &= abx = ab_0x = abx_0 = a_0bx_0 = ax = ab = b(ax + a_0x_0) = \\ &= a(b_0x + bx_0) = ab_0x + a_0bx_0 = bx_0 = a(x + b) = ax + a_0bx_0 = \\ &= b(a + x_0) = bx_0 + ab_0x = ax + bx_0. \end{aligned}$$

Dans notre cas:

$$M_0 = ax + bx_0, \quad M = a_0x + b_0x_0, \quad U = x, \quad Mu = a_0x.$$

Donc la détermination compacte de  $x$  est  $x = xa_0$ . En ajoutant au membre droit de cette égalité tous les zéros logiques donnés plus haut, nous recevrons toutes les 16 conséquences principales du problème en forme des déterminations de  $x$ , et nommément:

$$\begin{aligned} 1^0, \quad x &= a_0x + 0 = a_0x, \\ 2^0, \quad x &= a_0x + abx = x(a_0 + b), \\ 3^0, \quad x &= a_0x + ab_0x = x(a_0 + b_0), \\ 4^0, \quad [x &= a_0x + abx_0] = (x = a_0x, \quad ab = 0), \\ 5^0, \quad x &= a_0x + a_0bx_0 = a_0(x + b) = a_0b + a_0b_0x, \\ 6^0, \quad x &= a_0x + ax = x, \\ 7^0, \quad x &= a_0x + ab, \\ 8^0, \quad x &= a_0x + abx + a_0bx_0 = x(a_0 + b) + x_0a_0b = \\ &= a_0b + x(ab + a_0b_0), \\ 9^0, \quad [x &= a_0x + ab_0x + abx_0] = x(a_0 + b_0) + x_0ab = \\ &= (ab = 0), \end{aligned}$$

$$10^0, x = a_0x + ab_0x + a_0bx_0 = x(a_0 + b_0) + x_0a_0b = \\ = a_0b + xb_0,$$

$$11^0, [x = a_0x + bx_0] = [x = x(a_0b + a_0b_0) + x_0(ab + \\ + a_0b)] = [x = a_0b + xa_0b_0, ab = 0],$$

$$12^0, x = a_0x + ax + ab = x + ab,$$

$$13^0, x = a_0x + ax + a_0bx_0 = x + a_0b,$$

$$14^0, x = a_0x + bx_0 + ab = x(a_0 + b) + bx_0 = b + xa_0b_0,$$

$$15^0, [x = a_0x + ab_0x + bx_0 = x(a_0 + b_0) + bx_0 = \\ = a_0b + xb_0 + x_0ab] = [x = a_0b + xb_0, ab = 0],$$

$$16^0, x = a_0x + ax + bx_0 = x + b.$$

Ici les déterminations  $1^0$ ,  $6^0$ ,  $11^0$  et  $16^0$  sont les cardinales: la compacte, l'identique, la complète et la détaillée corrélativement. Les déterminations  $2^0$ ,  $3^0$ ,  $12^0$  et  $13^0$  sont les éléments. La détermination  $9^0$  est fictive: c'est le résultat masqué de l'élimination de  $x$ . Les résultats des éliminations de  $a$  et de  $b$  sont les formules  $16^0$  et  $1^0$  corrélativement. La formule  $6^0$  est le résultat de l'élimination de  $a$  et de  $b$  à la fois. Les déterminations  $5^0$ ,  $7^0$ ,  $8^0$ ,  $10^0$  et  $14^0$  sont les intermédiaires. Enfin les déterminations  $4^0$  et  $15^0$  sont les bipartibles, équivalentes aux systèmes  $y$  indiqués. Un tel système est indiqué aussi pour la détermination complète  $11^0$ .

Toutes les classes logiquement égales à  $x$  sont:

$$x = a_0x = x(a_0 + b) = x(a_0 + b_0) = a_0x + abx_0 = a_0b + a_0b_0x = \\ = ab + a_0x = a_0b + x(ab + a_0b_0) = x(a_0 + b_0) + x_0ab = a_0b + xb_0 = \\ a_0x + bx_0 = x + ab = x + a_0b = b + xa_0b_0 = a_0b + xb_0 + x_0ab = x + b.$$

Nous savons que toutes les 256 classes différentes qu'on peut composer à l'aide des trois lettres  $a$ ,  $b$ ,  $x$ , doivent se partager en les 16 ( $2^{2^m}$ ) groupes avec les 16 ( $2^m$ ) classes (logiquement égales grâce à l'égalité donnée  $0 = ax + bx_0$ ) dans la chacune. Plus haut nous avons trouvées les classes appartenantes aux deux de ces groupes.

### XIX.

La quatrième méthode pour le même but—les complications de la détermination détaillée à l'aide des unités logiques. Les conséquences du problème de Venn:  $a = a(bc_0 + b_0c)$ ,  $b = ab$ .

La loi des conséquences prise en sa forme partielle (I) qui est:

$$(1=M) \therefore (1=M+X)$$

nous montre que toutes les unités logiques du problème  $1=M$  coïncident avec toutes les superclasses identiques de la fonction  $M$ , c'est à dire du complet logique tout de ce problème. Mais les deux fonctions  $M$  et  $M_0$ , étant les négations mutuelles, ne peuvent pas avoir des superclasses communes (autre 1). Cela se rapporte aussi aux deux fonctions  $M$  et  $M_0 + U$  la seconde desquelles est la superclasse quelconque de  $M_0$ . Donc la décomposition dans les facteurs de la fonction  $M_0 + U$  ne peut contenir aucune des unités logiques du problème  $1=M$ . S'il en est ainsi, la détermination détaillée  $U = U + M_0$  nous présente la fonction  $U + M_0$  qui est totalement exempte des unités logiques de ce problème. Prenons à présent la forme (VII) de la loi des conséquences, c'est à dire la formule:

$$U = (U + M_0)(M + \zeta).$$

Ici, conformément à ce qui est dit plus haut, le premier facteur  $U + M_0$  est exempt des unités logiques du problème, tandis que le second facteur  $M + \zeta$  n'est autre chose que l'expression générale de toutes ces unités logiques. Cela nous permet d'offrir la méthode suivante pour recevoir toutes les conséquences du problème  $1=M$  en forme des déterminations de la fonction  $U$  prise arbitrairement: multiplier consécutivement la somme  $U + M_0$  par toutes les unités logiques du problème et

égaler tous ces produits à  $U$ , où, en d'autres termes: compliquer le second membre de la détermination détaillée de  $U$  à l'aide de toutes les unités mentionnées. Quant à ces unités, nous pouvons trouver toutes ses valeurs ou par la formule générale  $1=M+X=M+M_0X$ , ou à l'aide des combinaisons des unités élémentaires du problème.

Cette méthode, semblablement à la méthode du chapitre précédent, nous donnera toutes les conséquences du problème en les deux formes différentes à la fois: en forme des déterminations de l'unité et en forme des déterminations de la fonction prise pour  $U$ . Ici et là nous recevons à la fois les deux groupes des 2<sup>m</sup> classes logiquement égales.

*Exemple.* Trouvons en forme des déterminations de la classe  $bc$  toutes les conséquences principales du problème de Venn:

$$a=a(bc_0 + b_0c), \quad b=ab,$$

dont l'énoncé verbal est donné dans mon chapitre VI. En proposant ce problème, Venn attendait de ses disciples la réponse:  $bc=0$ . Nous démontrerons ici qu'outre cette valeur la classe  $bc$  doit avoir encore 15 valeurs principales et une infinité des valeurs secondaires (\*).

Les quatres éléments du problème sont:

$$0=a_0bc_0, \quad 0=a_0bc, \quad 0=ab_0c_0, \quad 0=abc,$$

ou en forme des déterminations de l'unité:

$$1=a+b_0+c, \quad 1=a+b_0+c_0, \quad 1=a_0+b+c, \quad 1=a_0+b_0+c_0.$$

---

(\*) Dans son ouvrage (anglais) «Les fondements de la Science» S. Jevons dit que l'exposition des prémisses de ce problème Venn a suivi par la question indéterminée: qu'est ce que nous concluons d'ici? S'il en est ainsi, le nombre des réponses possibles doit s'égaliser à 4096 (le produit du nombre des conséquences 16 par le nombre 256 de ses formes principales).

Toutes les combinaisons de ces éléments (à l'aide des multiplications) nous donneront les 16 valeurs de l'unité logique du problème, nommément:

$$\begin{aligned} 1 &= a + b_0 + c = a + b_0 + c_0 = a_0 + b + c = a_0 + b_0 + c_0 = a + b_0 = \\ &= c + ab + a_0 b_0 = b_0 + ac_0 + a_0 c = ab + ac + a_0 b_0 + a_0 c_0 = b_0 + c_0 = \\ &= a_0 + bc_0 + b_0 c = ab + ac + a_0 b_0 + b_0 c = b_0 + ac_0 = \\ &= a_0 b_0 + a_0 c + abc_0 + b_0 c = a_0 b_0 + a_0 c_0 + bc_0 + b_0 c = abc_0 + a_0 b_0 + b_0 c. \end{aligned}$$

Dans notre cas:

$$M_0 = bc + ab_0 c_0 + a_0 bc_0, \quad U = bc, \quad U + M_0 = bc + ab_0 c_0 + a_0 bc_0.$$

Donc la détermination détaillée de  $bc$  est:

$$bc = bc + ab_0 c_0 + a_0 bc_0.$$

En multipliant le membre droit de cette égalité consécutivement par toutes les unités logiques trouvées plus haut et en égalant chacun de ces produits à  $bc$ , nous recevrons en forme désirable toutes les 16 conséquences principales du problème, savoir:

$$\begin{aligned} 1^0, \quad bc &= (bc + ab_0 c_0 + a_0 bc_0) 1 = bc + ab_0 c_0 + a_0 bc_0, \\ 2^0, \quad bc &= (bc + ab_0 c_0 + a_0 bc_0) (a + b_0 + c) = abc + ab_0 c_0 + bc = bc + ab_0 c_0, \\ 3^0, \quad bc &= (bc + ab_0 c_0 + a_0 bc_0) (a + b_0 + c_0) = abc + ab_0 c_0 + a_0 bc_0, \\ 4^0, \quad bc &= (bc + ab_0 c_0 + a_0 bc_0) (a_0 + b + c) = a_0 bc + a_0 bc_0 + bc = bc + a_0 bc_0, \\ 5^0, \quad bc &= (bc + ab_0 c_0 + a_0 bc_0) (a_c + b_0 + c_0) = a_0 bc + a_0 bc_0 + ab_0 c_0 = \\ &= a_0 b + ab_0 c_0, \\ 6^0, \quad bc &= (bc + ab_0 c_0 + a_0 bc_0) (a + b_0) = abc + ab_0 c_0, \\ 7^0, \quad bc &= (bc + ab_0 c_0 + a_0 bc_0) (c + ab + a_0 b_0) = bc + abc = bc, \\ 8^0, \quad bc &= (bc + ab_0 c_0 + a_0 bc_0) (b_0 + ac_0 + a_0 c) = ab_0 c_0 + a_0 bc, \\ 9^0, \quad bc &= (bc + ab_0 c_0 + a_0 bc_0) (ab + ac + a_0 b_0 + a_0 c_0) = abc + a_0 bc_0, \\ 10^0, \quad bc &= (bc + ab_0 c_0 + a_0 bc_0) (b_0 + c_0) = ab_0 c_0 + a_0 bc_0, \\ 11^0, \quad bc &= (bc + ab_0 c_0 + a_0 bc_0) (a_0 + bc_0 + b_0 c) = a_0 bc + a_0 bc_0 = a_0 b, \\ 12^0, \quad bc &= (bc + ab_0 c_0 + a_0 bc_0) (ab + ac + a_0 b_0 + b_0 c) = abc, \end{aligned}$$



$$13^{\circ}, bc = (bc + ab_0c_0 + a_0bc_0)(b_0 + ac_0) = ab_0c_0,$$

$$14^{\circ}, bc = (bc + ab_0c_0 + a_0bc_0)(a_0b_0 + a_0c + abc_0 + b_0c) = a_0bc,$$

$$15^{\circ}, bc = (bc + ab_0c_0 + a_0bc_0)(a_0b_0 + a_0c_0 + bc_0 + b_0c) = a_0bc_0,$$

$$16^{\circ}, bc = (bc + ab_0c_0 + a_0bc_0)(abc_0 + a_0b_0 + b_0c) = 0.$$

Les déterminations cardinales sont: 1<sup>o</sup> la détaillée, 16<sup>o</sup> la compacte, 10<sup>o</sup> la complète et 7<sup>o</sup> l'identique. Les déterminations élémentaires sont: 2<sup>o</sup> et 4<sup>o</sup> les éléments de supériorité de  $bc$ , 12<sup>o</sup> et 14<sup>o</sup> les éléments de sa subordination. La détermination 16<sup>o</sup> est le résultat de l'élimination de  $a$ . La détermination 9<sup>o</sup> est le résultat masqué de l'élimination de  $c$ . La détermination 7<sup>o</sup> est le résultat masqué de l'élimination de  $b$ , car la lettre  $b$  ne peut pas être éliminée du problème et le résultat de son élimination doit être une identité.

Conformément à ce qui précède nous pouvons écrire la chaîne des égalités:

$$\begin{aligned} bc &= bc + ab_0c_0 + a_0bc_0 = bc + ab_0c_0 = abc + ab_0c_0 + a_0bc_0 = \\ &= bc + a_0bc_0 = a_0b + ab_0c_0 = abc + ab_0c_0 = ab_0c_0 + a_0bc = \\ &= abc + a_0bc_0 = ab_0c_0 + a_0bc_0 = a_0b = abc = ab_0c_0 = a_0bc = a_0bc_0 = 0. \end{aligned}$$

## XX.

**La cinquième méthode pour le même but—l'emploi de la formule générale  $U = U(M + \xi) + U_0M_0\gamma$ . La loi des conséquences principales. Les conséquences de l'égalité  $a = b + c$ .**

Dans les chapitres XXI—XIX sont exposées les quatre méthodes différentes pour recevoir toutes les conséquences principales de l'égalité générale  $1 = M$  en forme des déterminations de la fonction  $U$  prise arbitrairement. Du nombre des autres méthodes possibles pour le même but je puis indiquer ici, sans les développements ultérieurs, celles-ci par exemple: 1<sup>o</sup>, trouver toutes les 2<sup>m</sup> unités logiques du problème à l'aide de la formule  $1 = M + X$  et les convertir en forme des détermi-



nations de  $U$ , et  $2^0$ , trouver tous les  $2^m$  zéros logiques du problème à l'aide de la formule  $0=M_0Y$  et les convertir d'après la même manière.

Dans ce chapitre nous chercherons pour le problème  $1=M$  ayant  $m$  éléments toutes ses  $2^m$  conséquences principales en forme des déterminations de  $U$  en usant la forme (V) de la loi des conséquences, c'est à dire la formule

$$U=U(M+\xi)+U_0M_0\gamma, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

ou, ce qui est la même chose, le système:

$$U=U(M+\xi), \quad U=U+M_0\gamma \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Nous supposerons que les  $m$  éléments du problème se partagent dans les deux groupes: le groupe de  $m-s$  éléments de la subordination de la fonction  $U$  et le groupe de  $s$  éléments de sa supériorité.

La formule (1) ne nous donnera que les conséquences principales, si nous traiterons les classes arbitraires  $\xi$  et  $\gamma$  comme les fonctions des  $n$  lettres du problème seulement. Ainsi le nombre total des valeurs différentes de la chacune des fonctions  $\xi$  et  $\gamma$  est égal à  $2^{2^n}$ . Mais le nombre des valeurs différentes des fonctions  $U(M+\xi)$  et  $U+M_0\gamma$  doit être sensiblement plus petit.

Démontrons que, pour toutes les  $2^{2^n}$  valeurs de  $\xi$ , la fonction  $U(M+\xi)$  n'a que le nombre  $2^{m-s}$  des valeurs différentes et que, pour toutes les  $2^{2^n}$  valeurs de  $\gamma$ , la fonction  $U+M_0\gamma$  a seulement le nombre  $2^s$  des valeurs différentes. Dans ce but nous démontrerons d'abord que l'égalité

$$U(M+\xi)=U(M+A) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

a le nombre  $2^{2^n-m+s}$  des racines de  $\xi$  et l'égalité

$$U+M_0\gamma=U+M_0B \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

a le nombre  $2^{2-s}$  des racines de  $\gamma$ , où  $A$  et  $B$  sont quelques classes du discours prises à volonté. En effet, l'égalité (3) est équivalente à l'égalité

$$0 = UM_0 A_0 \xi + UM_0 A \xi_0$$

ou encore à l'égalité

$$\xi = \xi(U_0 + M + A) + \xi_0 UM_0 A = UM_0 A + \xi(M + U_0 M_0), \dots \quad (5)$$

et l'égalité (4) est équivalente à l'égalité

$$0 = U_0 M_0 B_0 \gamma + U_0 M_0 B \gamma_0$$

ou encore à l'égalité

$$\gamma = \gamma(U + M + B) + \gamma_0 U_0 M_0 B = U_0 M_0 B + \gamma(M + UM_0) \dots \quad (6)$$

Nous savons que le nombre des racines principales différentes de la détermination intermédiaire (5) doit s'égaliser au nombre 2 élevé à la puissance égale au nombre des minimaux de la fonction  $M + U_0 M_0$ . Pareillement le nombre des racines de  $\gamma$  pour l'égalité (4) ou (6) doit s'égaliser au nombre 2 élevé à la puissance égale au nombre des minimaux de la fonction  $M + UM_0$ . Mais si le nombre des lettres du problème est  $n$ , le nombre de ses éléments est  $m$  et le nombre des éléments de supériorité de  $U$  est  $s$ , alors le nombre des minimaux doit s'égaliser à:

	$m$ pour la fonction $M_0$ ,			
$2^n - m$	"	"	"	$M$ ,
$s$	"	"	"	$M_0 U_0$ ,
$m - s$	"	"	"	$M_0 U$ ,
$2^n - m + s$	"	"	"	$M + M_0 U_0$ ,
$2^n - s$	"	"	"	$M + M_0 U$ .

Par conséquent l'égalité (5) ou (3) a pour chaque valeur de  $A$  le nombre  $2^{2-m+s}$  des racines de  $\xi$  et l'égalité (6) ou

(4) a pour chaque valeur de  $B$  le nombre  $2^{2-s}$  des racines de  $\gamma$ , ce qu'il fallait démontrer.

S'il en est ainsi, l'égalité (3) doit diviser toutes les  $2^2$  classes du discours dans le nombre  $2^{m-s}$  des groupes chacune desquelles contient le nombre  $2^{2-m+s}$  des classes qui étant substituées successivement dans la première des égalités (2) au lieu de  $\xi$  ne nous donnent qu'une seule valeur de la fonction  $U(M+\xi)$ . Pareillement, l'égalité (4) divise toutes les  $2^2$  classes du discours dans le nombre  $2^s$  des groupes dont chacun contient le nombre  $2^{2-s}$  des classes qui étant substituées consécutivement dans la seconde des égalités (2) au lieu de  $\gamma$  ne nous donnent qu'une seule valeur de la fonction  $U+M_0\gamma$ . D'où nous concluons que la fonction  $U(M+\xi)$  ne peut avoir que le nombre  $2^{m-s}$  des valeurs différentes et que le nombre des valeurs différentes de la fonction  $U+M_0\gamma$  est  $2^s$ . Par conséquent le nombre total des conséquences principales différentes que nous pouvons tirer du problème donné  $1=M$  à l'aide de la formule générale (1) est  $2^{m-s} \times 2^s = 2^m$ .

Pour construire effectivement toutes ces conséquences, il ne nous reste à présent que de trouver un représentant pour chacun des groupes mentionnés de la première sorte et de la seconde. Pour cela il suffit de trouver:  $1^0$ , les  $2^{m-s}$  classes qui étant prises pour  $\xi$  nous donnent les  $2^{m-s}$  valeurs différentes de la fonction  $U(M+\xi)$  et  $2^0$ , les  $2^s$  classes qui étant prises pour  $\gamma$  nous donnent les  $2^s$  valeurs différentes de la fonction  $U+M_0\gamma$ .

Supposons que les  $m$  éléments du problème, divisés en deux groupes différents, sont:

$$U=Up^{(1)}, U=Up^{(2)}, U=Up^{(3)}, \dots, U=Up^{(m-s)}, \dots \quad (7)$$

$$U=U+k^{(1)}, U=U+k^{(2)}, U=U+k^{(3)}, \dots, U=U+k^{(s)}, \dots \quad (8)$$

où  $p^{(1)}, p^{(2)}, \dots, p^{(m-s)}$  sont quelques uns des maximaux du discours et en même temps des unités logiques du problème,  $k^{(1)}, k^{(2)}, \dots, k^{(s)}$  sont quelques uns des minimaux du discours et des zéros logiques du problème. Vu que le nombre total des combinaisons possibles des  $m-s$  égalités (7) à l'aide des multiplications est précisément  $2^{m-s}$  et le nombre total des combinaisons possibles de  $s$  égalités (8) à l'aide des additions est exactement  $2^s$ , il est naturel de supposer que les classes qui entrent en qualité des classes déterminantes (\*) dans les résultats des telles combinaisons sont les représentants mentionnés. Démontrons que cette supposition est juste.

Toutes les combinaisons à l'aide de multiplications des égalités (7) et toutes les combinaisons à l'aide des additions des égalités (8) nous donnent les égalités dont les classes déterminantes corrélativement sont:

$$1; p^{(1)}, p^{(2)}, \dots, p^{(m-s)}; p^{(1)}p^{(2)}, p^{(1)}p^{(3)}, \dots, p^{(2)}p^{(3)}, \dots, p^{(1)}p^{(2)}p^{(3)} \dots p^{(m-s)}. \quad (9)$$

$$0; k^{(1)}, k^{(2)}, \dots, k^{(s)}; k^{(1)}+k^{(2)}, k^{(1)}+k^{(3)}, \dots, k^{(2)}+k^{(3)}, \dots, k^{(1)}+k^{(2)}+\dots+k^{(s)}. \quad (10)$$

Il faut démontrer que les  $2^{m-s}$  classes (9) étant prises consécutivement pour  $\xi$  nous donnent les valeurs différentes de la fonction  $U(M+\xi)$  et que les  $2^s$  classes (10) étant prises consécutivement pour  $\eta$  nous donnent les valeurs différentes de la fonction  $U+M_0\eta$ .

Dans ce but nous démontrerons d'abord que si les valeurs de  $\xi$  sont renfermées dans la série (9) et les valeurs de  $\eta$  dans la série (10), alors la somme  $M+\xi$  est égale à  $\xi$  et le produit  $M_0\eta$  est égal à  $\eta$ . Mais cela est ainsi, car la décomposition de la fonction  $M$  dans les maximaux embrasse, entre autres,

---

(\*) Dans la détermination de subordination  $A=AB$  la classe  $B$  est sa classe déterminante, aussi que la classe  $C$  dans la détermination de supériorité  $A=A+C$ .



Cette formule (VIII) exprime la loi des conséquences principales. Elle est soumise à la condition que  $\xi$  et  $\eta$  aient les valeurs données par les séries (9) et (10) et ne peut nous fournir que les conséquences principales.

Ainsi pour recevoir toutes les conséquences principales du problème  $1=M$  d'après la formule (1) ou la formule (VIII) il faut: construire les éléments (7) et (8); calculer toutes les classes des séries (9) et (10); multiplier par  $U$  toutes les classes de la série (9) et par  $U_0$  toutes les classes de la série (10); enfin ajouter consécutivement à tous les produits de la première sorte tous les produits de la seconde.

Il n'est pas superflu d'observer que les quatre conséquences cardinales se déduisent de la formule (VIII) à l'aide des changements:

$\xi$  en 1,  $\eta$  en 0—la détermination identique  $U=U$ ,

$\xi$  en  $p^{(1)}p^{(2)}...p^{(m-s)}$ ,  $\eta$  en 0—la détermination compacte  $U=UM$ ,

$\xi$  en 1,  $\eta$  en  $k^{(1)}+k^{(2)}+...+k^{(s)}$ —la détermination détaillée  $U=U+M_0$

et  $\xi$  en  $p^{(1)}p^{(2)}...p^{(m-s)}$ ,  $\eta$  en  $k^{(1)}+k^{(2)}+...+k^{(s)}$ —la détermination complète  $U=UM+U_0M_0$ .

*Exemple.* Cherchons en forme des déterminations de  $b$  toutes les conséquences principales de l'égalité  $a=b+c$ .

Il est à observer que ce problème est équivalent au problème de la soustraction logique, car déterminer  $b$  de l'égalité  $a=b+c$  n'est autre chose que trouver la différence des classes  $a$  et  $c$ .

L'égalité donnée étant équivalente à l'égalité

$$0=ab_0c_0+a_0(b+c),$$

les quatre éléments du problème sont:

$$0=ab_0c_0, 0=a_0bc, 0=a_0bc_0, 0=a_0b_0c$$



ou en forme des déterminations de  $b$ :

$$b=b(a+c_0), \quad b=b(a+c), \quad b=b+ac_0, \quad b=b+a_0c$$

ou encore:

$$b=b(a+b_0+c_0), \quad b=b(a+b_0+c), \quad b=b+ab_0c_0, \quad b=b+a_0b_0c.$$

Dans ce cas nous avons:  $m=4, s=2, m-s=2, 2^{m-s}=2^2=4$ .  
Chacune des séries (9) et (10) doit contenir les quatre classes, savoir:

$$1; a+b_0+c_0, a+b_0+c; a+b_0, \quad \dots \quad (9^*)$$

$$0; ab_0c_0, a_0b_0c; b_0(ac_0+a_0c) \quad \dots \quad (10^*)$$

Après les multiplications des classes de ces séries par  $b$  et  $b_0$  corrélativement, nous aurons:

$$b, b(a+c_0), b(a+c), ba, \\ 0, b_0ac_0, b_0a_0c, b_0(ac_0+a_0c).$$

En ajoutant consécutivement à chacune des classes de la première de ces dernières séries chacune des classes de la seconde série, nous épuiserons toutes les 16 conséquences du problème donné, et nommément:

- 1°,  $b=b$ ,
- 2°,  $b=b(a+c_0)$ ,
- 3°,  $b=b(a+c)$ ,
- 4°,  $b=ba$ ,
- 5°,  $b=b+b_0ac_0=b+ac_0$ ,
- 6°,  $b=b(a+c_0)+b_0ac_0=ac_0+b(ac+a_0c_0)$ ,
- 7°,  $b=b(a+c)+b_0ac_0=ac_0+bc$ ,
- 8°,  $b=ba+b_0ac_0=ac_0+bac$ ,
- 9°,  $b=b+b_0a_0c=b+a_0c$ ,
- 10°,  $[b=b(a+c_0)+b_0a_0c]=(a_0c=0)$ ,
- 11°,  $b=b(a+c)+b_0a_0c=a_0c+ba$ ,

- $12^0, [b=ba+b_0a_0c]=(a_0c=0, b=ba),$   
 $13^0, b=b+b_0(ac_0+a_0c)=b+ac_0+a_0c,$   
 $14^0, [b=b(a+c_0)+b_0(ac_0+a_0c)]=[a_0c=0, b=ac_0+b(ac+a_0c)],$   
 $15^0, b=b(a+c)+b_0(ac_0+a_0c)=ac_0+a_0c+bac,$   
 $16^0, [b=ba+b_0(ac_0+a_0c)]=(a_0c=0, b=ac_0+bac).$

Ici les déterminations cardinales sont:  $1^0$ —l'identique,  $4^0$ —la compacte,  $13^0$ — la détaillée et  $16^0$ —la complète. Les déterminations  $2^0$  et  $3^0$  sont les éléments de subordination de  $b$ , les déterminations  $5^0$  et  $9^0$ —les éléments de sa supériorité. La détermination  $4^0$  est le résultat de l' élimination du problème de la lettre  $c$ . La formule  $10^0$  est la détermination fictive de  $b$  et le résultat masqué de l'élimination du problème de la lettre  $b$ . La lettre  $a$  ne peut point être éliminée du problème et le résultat de son élimination est la détermination identique  $1^0$ :  $b=b$ . Les déterminations  $6^0, 7^0, 8^0, 11^0$  et  $15^0$  sont intermédiaires. Enfin, les déterminations  $12^0, 14^0$  et  $16^0$  sont bipartibles.

## XXI.

**Les résultats de l'élimination des lettres traitées comme les conséquences principales. Exemple: égalité  $a=bc$ .**

Dans le chapitre XI sont exposées les méthodes pratiques de l'élimination des lettres dans les égalités logiques. Vu que les résultats de telles éliminations appartiennent au nombre des conséquences principales, il n'est pas superflu d'indiquer ici l'une des méthodes possibles pour recevoir les résultats mentionnés d'après la loi générale des conséquences.

Prenons la formule générale des conséquences principales

$$U=U\xi+U_0\eta, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

où  $\xi$  et  $\eta$  ont les valeurs renfermées dans les séries (9) et (10) du chapitre précédent.



$U$  l'un des résultats de l'élimination de chaque lettre du discours est toujours l'identité  $U=U$  (qui est équivalente à  $0=0$ ).

Si les classes  $U$  et  $0$  sont dans les séries (2) et (3) les seules classes indépendantes de la lettre  $a$ , l'identité  $U=U$  est le seul et en même temps le complet résultat de l'élimination de  $a$  dans le problème donné. Dans ce cas la lettre  $a$  ne peut point être éliminée du problème et toutes les connaissances du problème se rapportent à la lettre  $a$ .

Mais, outre les résultats identiques qui n'ont aucune valeur logique, chaque problème doit avoir généralement un ou plusieurs résultats effectifs de l'élimination de la chacune de ses lettres.

En admettant de nouveau que la fonction prise pour  $U$  ne dépend point de la lettre à éliminer  $a$ , supposons que la série (2) ne contient que les deux classes indépendantes de  $a$ , nommément  $U$  et  $UP$ , tandis que dans la série (3) la classe  $0$  est l'unique classe indépendante de  $a$ . En ce cas le problème donné  $1=M$  n'admet qu'un seul résultat effectif de l'élimination de  $a$  qui correspond aux valeurs  $V=UP$ ,  $W=0$  et qui est  $U=UP$ .

Le problème n'a aussi qu'un seul résultat (effectif) de l'élimination de  $a$ , si les seules classes indépendantes de  $a$  sont: dans la série (2) la classe  $U$  et dans la série (3) les classes  $0$  et  $U_0K$ . Ce résultat unique, correspondant aux valeurs  $V=U$ ,  $W=U_0K$ , est  $U=U+U_0K=U+K$ .

Si les seules classes indépendantes de  $a$  sont: dans la série (2) les classes  $U$  et  $UP$  et dans la série (3) les classes  $0$  et  $U_0K$ , le problème donné doit avoir les quatre résultats de l'élimination de  $a$ , savoir:

$$U=U, U=UP, U=U+K, U=UP+U_0K,$$

où la dernière formule présente le résultat complet.

En constatant ainsi le fait de l'existence possible pour chaque problème des quelques résultats de l'élimination de chaque lettre, nous ne considérerons plus loin que les résultats complets.

Supposons que les séries (2) et (3) sont composées régulièrement et successivement, c'est à dire: les combinaisons binaires sont données là plut tôt que les combinaisons triples, ces dernières plus tôt que les combinaisons quadruples et ainsi de suite. Supposons encore que les dernières classes indépendantes de  $a$  sont: dans la série (2) la classe  $UG$  et dans la série (3) la classe  $U_0H$ . Alors nous pouvons composer ces trois résultats de l'élimination de  $a$ :

$$U=UG, \quad U=U+H, \quad U=UG+U_0H,$$

où le troisième est le résultat complet; quant aux deux autres, nous pouvons les nommer, s'il le faut, le résultat compactement complet et le résultat détailement-complet.

Si la fonction  $U$  est lui-même l'une des lettres du discours, par exemple  $a$ , alors les séries (2) et (3) peuvent donner facilement tous les résultats de l'élimination des quelques lettres  $b, c, d, \dots$  à la fois. Outre cela, nous pouvons trouver dans ce cas le résultat masqué de l'élimination de la lettre même  $a$ ; pour cela il suffit de prendre pour  $V$  et  $W$  dans les séries (2) et (3) les classes où les coefficients de  $a$  et de  $a_0$  sont les négations mutuelles.

En général la méthode exposée dans ce chapitre n'est pas praticable et n'a que la valeur théorique.

*Exemple.* Cherchons en forme des déterminations de  $b$  tous les résultats complets de l'élimination des lettres pour l'égalité  $a=bc$ .

Il n'est pas superflu d'observer que la recherche de  $b$  à l'aide de l'égalité  $a=bc$  est équivalente à la division logique de  $a$  par  $c$ .

L'égalité  $a=bc$  étant équivalente à l'égalité

$$0=a(b_0+c_0)+a_0bc,$$

les quatre éléments du problème sont:

$$0=ab_0c, \quad 0=abc_0, \quad 0=ab_0c_0, \quad 0=a_0bc,$$

ou en forme des déterminations de  $b$ :

$$b=b(a_0+c), \quad b=b(a+c_0), \quad b=b+ac, \quad b=b+ac_0.$$

En ce cas nous avons:  $m=4$ ,  $s=2$ ;  $2^{m-s}=2^s=4$ . Les séries (2) et (3) seront:

$$b; b(a_0+c), b(a+c_0); b(ac+a_0c_0) \quad . \quad . \quad . \quad (2^*)$$

$$0; b_0ac, b_0ac_0; b_0a \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3^*)$$

Toutes les conséquences principales de l'égalité donnée seront épuisées en égalant  $b$  à la somme de l'une des classes de la série (2\*) avec l'une des classes de la série (3\*). Mais ici nous ne devons construire que celles des conséquences qui sont les résultats de l'élimination des lettres dans le problème donné. Vu que l'égalité  $a=bc$  n'a que les trois lettres, on doit avoir les  $2^3$  résultats complets de l'élimination des lettres. Nous les trouverons tous, en forme des déterminations de  $b$ , consécutivement. Beaucoup de ces résultats doivent coïncider les uns avec les autres.

1°. Le résultat de non-élimination des lettres doit, comme toujours, coïncider avec la détermination complète de la fonction prise pour  $U$ . Dans notre cas ce résultat est évidemment:

$$b=b(ac+a_0c_0)+b_0a.$$

2°. Pour éliminer complètement la lettre  $a$ , il faut prendre dans les séries (2\*) et (3\*) les dernières des classes indépendantes de  $a$ . Telles classes sont  $b$  et  $0$  corrélativement. Par

conséquent le résultat complet de l'élimination de  $a$  dans le problème donné est l'identité  $b=b+0=b$ . Cela désigne que la lettre  $a$  ne peut point être éliminée du problème et que toutes les connaissances du problème se rapportent à  $a$ .

3°, 4° et 5°. S'il en est ainsi, les trois résultats d'élimination: de  $a$  et de  $b$ , de  $a$  et de  $c$ , et de  $a$ , de  $b$  et de  $c$  doivent aussi coïncider avec l'identité  $b=b$ .

6°. Pour éliminer complètement la lettre  $c$ , il faut prendre dans les séries (2\*) et (3\*) les dernières des classes indépendantes de  $c$ . Donc il faut poser:  $V=b$ ,  $W=b_0a$  et nous aurons:  $b=b+b_0a=b+a$ .

7°. Pour éliminer complètement la lettre  $b$ , il faut construire la détermination fictive de  $b$ . Dans ce but il faut prendre dans les séries (2\*) et (3\*) pour  $V$  et pour  $W$  les classes où les coefficients de  $b$  et de  $b_0$  sont les négations mutuelles. Telles classes évidemment sont:  $b(a_0+c)$  et  $b_0ac_0$ . Donc le résultat masqué de l'élimination de  $b$  sera:

$$b=b(a_0+c)+b_0ac_0.$$

La vraie valeur de cette égalité est  $ac_0=0$ .

Enfin, 8°, le résultat de l'élimination des lettres  $b$  et  $c$  à la fois s'obtient en prenant  $V=b$ ,  $W=0$ , et nous aurons de nouveau l'identité  $b=b$ .

## XXII.

**La méthode simple et générale pour construire la table des conséquences principales pour chaque problème exprimé à l'aide des égalités logiques. Les tables pour les égalités:  $a=ab$ ,  $a=ab+a_0b_0$  et  $a=a_0+b$ .**

Soit donné le problème logique équivalent à l'égalité  $1=M$ . Supposons, comme partout précédemment, que le nombre de ses lettres est  $n$  et le nombre de ses éléments est  $m$ . En



tel cas tous les  $2^m$  minimaux du discours doivent se distribuer ainsi: la fonction  $M_0$  doit avoir le nombre  $m$  des minimaux et la fonction  $M$  tous les minimaux restants en nombre  $2^n - m$ .

Nous savons que toutes les  $2^m$  subclasses identiques de la fonction  $M_0$  coïncident avec tous les  $2^m$  zéros logiques du problème  $1=M$  et que par conséquent toutes les  $2^{2^n-m}$  subclasses identiques de la fonction  $M$  doivent être exemptes totalement des zéros mentionnés. Donc pour composer les deux quelconques classes logiquement égales l'une à l'autre grâce à l'égalité  $1=M$ , il faut et il suffit d'ajouter à la subclasse quelconque de la fonction  $M$  une fois l'une des subclasses de la fonction  $M_0$  et l'autre fois l'autre de ses subclasses. Par cette manière nous pouvons construire pour chacune des  $2^{2^n-m}$  subclasses de  $M$  toutes les  $2^m$  classes qui sont égales à elle logiquement grâce à l'égalité donnée  $1=M$ , et la table des classes égales correspondante au problème  $1=M$  sera faite. Cette table peut être considérée aussi comme la table des conséquences principales de l'égalité  $1=M$ , car trouver la conséquence quelconque de l'égalité  $1=M$  en forme de détermination de  $M$  c'est—trouver l'une des classes logiquement égales à  $M$  grâce à l'égalité  $1=M$ .

Il est clair que la méthode précédente est basée sur l'emploi de la formule évidente:

$$(1=M) \therefore (Mx + M_0y = Mx + M_0z),$$

où  $x$ ,  $y$  et  $z$  sont les classes tout à fait arbitraires.

Je propose au lecteur de démontrer que,  $1^0$ , la formule:

$$Mx + M_0y = Mx + M_0z \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

se déduit de l'égalité  $1=M$  à l'aide de l'omission des connaissances:

$$0 = M_0(zy + z_0y_0)$$

et que, 2<sup>o</sup>, la formule (1) peut nous donner toutes les 2<sup>m</sup> conséquences principales de l'égalité  $1=M$  en toutes ses 2<sup>2</sup> formes principales.

Pour illustrer la méthode ci-donnée, construisons à l'aide de la formule (1) les tables des conséquences (principales) pour quelques problèmes de deux lettres  $a$  et  $b$ .

Toutes les 16 classes différentes du discours de deux lettres  $a$  et  $b$  sont:

$$0, 1, a, a_0, b, b_0, ab, ab_0, a_0b, a_0b_0, \\ a+b, a+b_0, a_0+b, a_0+b_0, ab+a_0b_0, ab_0+a_0b.$$

Pour les problèmes différents ces classes doivent se partager en groupes différemment.

1<sup>o</sup>. L'un des problèmes avec [un élément est  $a=ab$ . En ce cas:

$$M_0=ab_0, M=ab+a_0b+a_0b_0.$$

Toutes les 8 subclasses de  $M$  sont:

$$0; ab, a_0b, a_0b_0; b, a_0, ab+a_0b_0; a_0+b.$$

La table des conséquences sera:

0	$ab$	$a_0b$	$a_0b_0$	$b$	$a_0$	$ab+a_0b_0$	$a_0+b$
$ab_0$	$a$	$a_0b+ab_0$	$b_0$	$a+b$	$a_0+b_0$	$a+b_0$	1

Donc, par exemple, en forme des déterminations de  $b$  toutes les deux conséquences du problème  $a=ab$  sont:

$$b=b, b=a+b.$$

2<sup>o</sup>. Prenons à présent l'une des égalités avec deux éléments, par exemple

$$a=ab+a_0b_0.$$

Dans ce cas:

$$M_0=ab_0+a_0b_0, M=ab+a_0b.$$

Toutes les subclasses de  $M$  et de  $M_0$  corrélativement sont:

$$0, ab, a_0b, b, \\ 0, ab_0, a_0b_0, b_0.$$

La table des conséquences sera:

0	$ab$	$a_0b$	$b$
$ab_0$	$a$	$a_0b + ab_0$	$a + b$
$a_0b_0$	$ab + a_0b_0$	$a_0$	$a_0 + b$
$b_0$	$a + b_0$	$a_0 + b_0$	1

Donc, par exemple, en forme des déterminations de  $b$ , toutes les quatre conséquences du problème  $a=ab+a_0b_0$  sont:

$$b=b, b=a+b, b=a_0+b, b=1.$$

Pour l'autre des égalités avec deux éléments qui est  $a=b$  la table des conséquences est donnée dans le chapitre XIII.

Enfin, 3°, l'un des problèmes avec trois éléments est par exemple  $a=a_0+b$ . En ce cas:

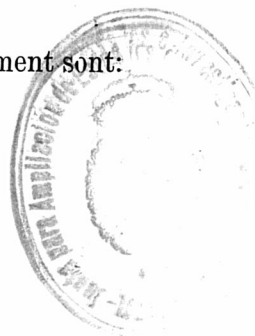
$$M_0=ab_0+a_0b+a_0b_0, M=ab.$$

Toutes les subclasses de  $M$  et de  $M_0$  corrélativement sont:

$$0, ab, \\ 0; ab_0, a_0b, a_0b_0; ab_0+a_0b, b_0, a_0; a_0+b_0.$$

La table des conséquences sera:

0	$ab$
$ab_0$	$a$
$a_0b$	$b$
$a_0b_0$	$ab + a_0b_0$
$ab_0 + a_0b$	$a + b$
$b_0$	$a + b_0$
$a_0$	$a_0 + b$
$a_0 + b_0$	1



Donc, par exemple, en forme des déterminations de  $b$ , toutes les 8 conséquences du problème  $a=a_0+b$  sont:

$$b=ab, b=a, b=b, b=ab+a_0b_0, b=a+b, b=a+b_0, b=a_0+b, \\ b=1.$$

La première des trois tables précédentes contient les 8 groupes des classes égales, la seconde les 4 groupes et la troisième les deux groupes.

### XXIII.

#### La loi des causes des égalités logiques.

Si la seconde de deux égalités logiques est la conséquence de la première, alors il est naturel de dire qu'en ce cas la première est *la cause* de la seconde. Ainsi chaque cause d'une égalité donnée doit fournir à nous cette égalité parmi ses conséquences. On peut aussi dire que chacune des causes de l'égalité donnée doit embrasser avec quelque excès tous les éléments et toutes les connaissances de cette égalité. Donc, pour déduire de l'égalité donnée l'une de ses causes, il suffit d'annexer à l'ensemble de toutes ses connaissances quelques connaissances étrangères à lui.

Il est aisé à comprendre que le problème sur les causes des égalités logiques est la généralisation du problème sur ses formes. En effet, si les connaissances annexées à l'égalité donnée sont nulles, la cause tirée de cette égalité en ce cas ne peut pas être autre chose que l'une de ses formes.

Certainement, nous ne devons pas exclure les deux cas extrêmes des causes: 1<sup>o</sup>, le cas, où les connaissances annexées à l'égalité donnée sont nulles, et 2<sup>o</sup>, le cas, où s'annexent toutes les connaissances qui manquent à cette égalité. Dans le premier cas la cause est l'une des formes de l'égalité don-

née; dans le second nous devons obtenir une égalité qui embrasse *toutes les connaissances possibles* et qui n'est autre chose que *l'absurdité logique*.

L'assertion que l'absurdité logique  $1=0$ , ou généralement  $U=U_0$ , embrasse toujours toutes les connaissances possibles peut sembler paradoxale. Pour dissiper à cet égard toutes les doutes, il faut dire [ce qui suit: 1°. Dans l'art. I nous avons démontré que toutes les absurdités logiques sont équivalentes les unes aux autres. Donc, chaque absurdité partielle  $A=A_0$  est équivalente à l'absurdité générale  $X=X_0$  exprimée à l'aide de toutes les lettres que nous voulons employer.—2°, Dans l'art. V j'ai expliqué que parmi toutes les  $2^2^n$  problèmes logiques que nous pouvons construire avec  $n$  lettres et à l'aide du signe  $=$  en forme des déterminations de  $A$  se trouve toujours l'absurdité  $A=A_0$  qui est l'unique problème ayant le nombre  $2^n$  des éléments. Or les égalités logiques contenant  $n$  lettres ne peuvent point avoir plus que ce nombre  $2^n$  des éléments car le discours de  $n$  lettres n'a que le nombre  $2^n$  des minimaux et qu'en forme des déterminations du zéro les éléments sont toujours de la sorte: un minimal quelconque est égal à zéro. Donc l'absurdité est l'égalité qui a le plus grand (autant que possible) nombre des éléments et par conséquent elle embrasse toutes les connaissances possibles.—3°, Il ne faut pas oublier que nous ne considérons partout que les connaissances exprimées à l'aide du signe  $=$ . Toutes les autres connaissances possibles sont exclues entièrement de notre discussion.— Enfin, 4°, l'absurdité  $U=U_0$  est équivalente au système  $U=0$ ,  $U_0=0$ , ou à l'égalité  $U+U_0=0$  qui nous montre qu'en ce cas tous les éléments du discours sont égales à zéro; donc, toutes les classes du discours (qui sont les sommes des minimaux) sont aussi égales à zéro; par conséquent toutes les rela-

tions entre ces classes sont également possibles, d'où nous concluons que chaque problème donné  $1=M$  est l'une des conséquences de l'absurdité logique générale et de chacune de ses formes en particulier.

Pour épuiser toutes les causes possibles de chaque égalité donnée, sans lacunes et réitérations, nous devons chercher les causes en forme des déterminations de la même classe  $U$  prise arbitrairement. Dans ce but nous devons convertir l'égalité donnée  $1=M$ , s'il le faudra, dans la forme  $U=UM+U_0M_0$ .

Pour exprimer le rapport qui existe entre une égalité quelconque et l'une de ses causes, nous employerons le signe  $\therefore$  placé parmi l'égalité donnée et sa cause. Ainsi la formule

$$(A=AB) \therefore (A=B)$$

désigne que l'une des causes de l'égalité  $A=AB$  est l'égalité  $A=B$ . Si la cause n'est qu'une des formes de l'égalité donnée, le signe  $\therefore$  doit coïncider avec le signe  $=$ .

Pour l'égalité générale  $1=M$  les deux causes extrêmes présentées en forme de déterminations de la fonction arbitraire  $U$  sont évidemment:

$$(1=M) \therefore (U=UM+U_0M_0), (1=M) \therefore (U=U_0).$$

Revenons à la recherche des formes différentes de la loi générale des causes.

1°. Supposons d'abord que le problème donné est réduit à la forme de l'égalité  $0=N$ . La formule évidente:

$$(0=N+X)=(0=N, 0=X)$$

nous montre que la jonction du problème donné  $0=N$  avec chaque égalité prise arbitrairement  $0=X$  nous donnera nécessairement la cause de ce problème. Donc toutes les causes du problème donné  $0=N$  doivent se renfermer dans le schème:

$$(0=N) \therefore (0=N+X), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (I)$$

qui exprime *la loi des causes* des égalités logiques. Cette loi peut être énoncée ainsi: en égalant consécutivement au zéro toutes les superclasses (identiques) du complet logique rien du problème donné nous épuiserons toutes les causes de ce problème.

Il est évident que la cause  $0=N+X$  se déduit de l'égalité  $0=N$  à l'aide de l'annexion des connaissances  $0=X$ .

Pour les valeurs  $X=0$  et  $X=1$  nous recevons les causes extrêmes de l'égalité  $0=N$ , savoir:  $0=N$  et  $0=1$ .

La formule (I) qui nous donne les causes des égalités en forme spéciale des déterminations du zéro n'est qu'une des formes particulières de la loi générale des causes.

2°. L'autre formule vraie:

$$(1=MU)=(1=M, 1=U)$$

nous donne immédiatement la seconde forme particulière de la même loi qui est:

$$(1=M) \therefore (1=MU) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (II)$$

Ici la cause  $1=MU$  se déduit de l'égalité donnée  $1=M$  à l'aide de l'annexion des connaissances  $1=U$ .

Les causes extrêmes de l'égalité  $1=M$  évidemment sont:  $1=M$  et  $1=0$ .

3°. La troisième formule vraie:

$$[A=ABX + A_0(C + U)] = (A=AB + A_0C, A=AX + A_0U)$$

nous donnera la troisième forme particulière de la loi des causes, nommément:

$$(A=AB + A_0C) \therefore [A=ABX + A_0(C + U)] \quad . \quad . \quad (III)$$

Ici la cause  $A=ABX + A_0(C + U)$  se déduit du problème  $A=AB + A_0C$  à l'aide de l'annexion des connaissances  $A=AX + A_0U$ .



Pour les deux systèmes de valeurs  $X=1, Y=0$  et  $X=0, Y=1$  nous recevons les causes extrêmes de l'égalité  $A=AB+A_0C$  qui sont:  $A=AB+A_0C$  et  $A=A_0$ .

4°. En posant en (III)  $C=B$ , nous aurons la quatrième forme particulière de la même loi, savoir:

$$(A=B) \therefore [A=ABX+A_0(B+Y)] \quad . \quad . \quad . \quad (IV)$$

Ici la cause se déduit de l'égalité donnée à l'aide de l'annexion des connaissances  $A=AX+A_0Y$ .

Les causes extrêmes de l'égalité  $A=B$  en forme des déterminations de  $A$  sont:  $A=B$  et  $A=A_0$ .

5°. L'égalité évidente:

$$[U=UM\xi+U_0(M_0+\eta)]=[U=UM+U_0M_0, U=U\xi+U_0\eta]$$

jointe aux conditions connues:

$$M=AB+A_0B_0, N=M_0=AB_0+A_0B$$

nous donnera encore une forme de la loi des causes, nommément:

$$(A=B) \therefore [U=UM\xi+U_0(M_0+\eta)], \quad . \quad . \quad . \quad (V)$$

où  $U, \xi$  et  $\eta$  sont les classes arbitraires. C'est la forme la plus générale de la loi mentionnée. Elle nous donnera les formes particulières (I), (II), (III) et (IV) pour les valeurs correspondantes:

- 1°,  $A=0, B=N, U=0, \eta=X$ ;
- 2°,  $A=1, B=M, U=1, \xi=Y$ ;
- 3°,  $B=AB'+A_0C, U=A, \xi=X, \eta=U$ ;
- 4°,  $U=A, \xi=X, \eta=U$ .

La formule (V) nous donne pour chaque égalité  $A=B$  toutes ses causes en forme des déterminations de la fonction prise à volonté  $U$ . Ainsi, l'assertion que l'une des classes du

discours est contenu en quelque sous-classe du complet logique *tout* du problème et contient quelque super-classe de son complet logique *rien* embrasse toutes les connaissances du problème avec quelque excès.

La cause  $U = UM\xi + U_0(M_0 + \eta)$  se déduit de l'égalité  $A = B$  à l'aide de l'annexion des connaissances  $U = U\xi U + {}_0\eta$ .

Les causes extrêmes de l'égalité  $A = B$  en forme des déterminations de  $U$  sont:  $U = UM + U_0M_0$  et  $U = U_0$ .

La détermination de la fonction arbitraire  $U$  tirée de l'égalité donnée  $A = B$  à l'aide de la formule (V) peut être nommée sa *détermination excessive*. En particulier, pour les valeurs  $\xi = 1$ ,  $\eta = 0$  elle nous donnera la détermination complète de  $U$ . Cela nous montre encore une fois que la loi des causes est, semblablement à la loi des conséquences, la généralisation de la loi des formes, mais dans une autre direction.

A la fin donnons encore deux formes générales de la même loi des causes.

Vu que:

$$UM\xi + U_0(M_0 + M\eta) = U_0M_0 + M(U\xi + U_0\eta),$$

nous pouvons poser:

$$U\xi + U_0\eta = \zeta,$$

après quoi la formule (V) devient:

$$(A = B) \therefore (U = U_0M_0 + M\zeta), \quad . \quad . \quad . \quad (VI)$$

ou encore:

$$(A = B) \therefore [U = (U_0 + M)(M_0 + \zeta)], \quad . \quad . \quad . \quad (VII)$$

où  $\zeta$  est une classe arbitraire.

Les formules (VI) et (VII) contiennent (outre  $U$ ) une seule classe arbitraire, au lieu de deux, mais elles cèdent à la formule (V) en ce que leurs significations logiques ne sont pas si évidentes.

## XXIV.

**Sur le nombre des causes différentes. Sur les problèmes opposés. La liaison entre les causes du problème donné et les conséquences du problème opposé. Sur les causes cardinales.**

Toutes les sept formes de la loi des causes renferment les symboles des classes tout à fait arbitraires. Cela nous montre que le nombre des causes pour chaque problème exprimé à l'aide des égalités logiques doit être *infini*. Mais si nous excluons, comme partout précédemment, les causes *secondaires* (qui renferment quelques lettres étrangères au discours et dont le nombre est infini), nous pouvons dire que le nombre des causes *principales* (qui sont exprimées à l'aide des lettres du discours seulement) doit être fini et peut être calculé exactement.

Démontrons que pour chaque égalité ayant  $m$  éléments et  $n$  lettres le nombre total des différentes causes principales est  $2^{n-m}$ .

Soit donnée l'égalité  $0 = M_0$ , ou  $1 = M$ , ayant  $m$  éléments et  $n$  lettres. Le discours de ces  $n$  lettres n'a que le nombre  $2^n$  des minimals qui se distribuent ainsi: la fonction  $M_0$  contient le nombre  $m$  des minimals et la fonction  $M$  tous les restants en nombre  $2^{n-m}$ . Ces  $2^{n-m}$  minimals manquants au complet zéro logique de l'égalité donnée  $0 = M_0$ , étant égalés séparément au zéro, composent évidemment les égalités qui peuvent servir des éléments pour quelques autres problèmes du discours et qui n'entrent point dans le problème donné. Il est clair que le nombre total des combinaisons différentes de ces  $2^{n-m}$  éléments manquants au problème donné est  $2^{2^{n-m}}$ . Or ce nombre est en même temps le nombre total des connaissances nouvelles que nous pouvons annexer à l'égalité donnée

$0=M_0$ , et par conséquent il coïncide aussi avec le nombre des différentes causes principales pour le problème donné.

Nous donnerons plus loin une autre démonstration de cette vérité dans l'article XXIX.

Convenons de dire généralement que les deux problèmes (égalités)  $A=B$  et  $A=B_0$  ou, ce qui est la même chose,  $A=B$  et  $A_0=B$  sont les problèmes (égalités) opposés l'un à l'autre.

S'il en est ainsi, le problème opposé au problème donné  $0=M_0$ , ou  $1=M$  doit être  $0=M$  ou  $1=M_0$ .

Il n'est pas difficile de se convaincre que, 1°, dans chaque paire des problèmes opposés le complet tout logique de l'un de ces problèmes coïncide avec le complet zéro de l'autre; que, 2°, si le nombre des éléments de l'un de ces problèmes est  $m$ , le nombre des éléments de l'autre doit être égal à  $2^n - m$ ; et que, 3°, le nombre des conséquences principales de l'un de ces problèmes doit s'égaliser au nombre des causes principales de l'autre.

Il est évident à présent que, 1°, tous les  $2^n - m$  éléments manquants à l'égalité donnée  $0=M_0$  sont les éléments du problème opposé à lui, c'est à dire du problème  $1=M_0$ , ou  $0=M$  et que, 2°, toutes les  $2^n - m$  connaissances que nous devons annexer à l'égalité donnée  $0=M_0$  pour avoir toutes ses causes principales sont les conséquences principales du problème opposé  $0=M$ .

Nous avons ainsi trouvé la règle suivante: pour construire toutes les causes (principales) de l'égalité  $1=M$  il faut annexer à elle consécutivement toutes les conséquences (principales) de l'égalité opposée  $0=M$ .

Telle est la dépendance entre les causes de l'une de deux égalités opposées et les conséquences de l'autre. Mais nous pou-

vons trouver pour elles la liaison encore plus simple et plus intime.

En effet, nous savons qu'en forme de déterminations de  $U$  toutes les causes de l'égalité  $1=M$  sont:

$$U = UM\xi + U_0(M_0 + \eta) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

et qu'en forme de déterminations de la négation de  $U$  toutes les conséquences de l'égalité opposée  $0=M$  sont:

$$U_0 = U_0(M_0 + \xi) + UM\eta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Mais les membres droits des égalités (1) et (2) sont les mêmes, car les classes  $\xi$  et  $\eta$  étant tout à fait arbitraires, nous pouvons les placer l'une au lieu de l'autre.

Cela nous permet de proposer la règle plus simple que la précédente, savoir: pour trouver en forme des déterminations de  $U$  toutes les causes (principales ou secondaires) de l'égalité donnée  $1=M$ , il faut: 1°, composer l'égalité  $0=M$  opposée à l'égalité donnée; 2°, calculer en forme des déterminations de la négation de  $U$ , c'est à dire de la fonction  $U_0$ , toutes les conséquences de cette égalité opposée; et, 3°, changer dans toutes les égalités qui expriment ces conséquences le membre gauche qui est  $U_0$  en sa négation qui est  $U$ .

On peut aussi dire que pour trouver en forme des déterminations de  $U$  toutes les causes de l'égalité donnée  $1=M$ , il suffit d'égaliser  $U$  consécutivement à toutes les classes qui sont égales logiquement à sa négation  $U_0$  grâce à l'égalité opposée  $0=M$ . Ainsi les classes qui déterminent  $U$  excessivement de l'égalité donnée  $1=M$  coïncident avec les classes qui déterminent la négation de  $U$  partiellement de l'égalité opposée  $0=M$ .

Pour conclure cet article, disons encore ce qui suit. Vu que les quatre conséquences cardinales de l'égalité opposée  $0=M$  en forme des déterminations de la négation de  $U$  sont:

$$U_0 = U_0, \quad U_0 = U_0 M_0, \quad U_0 = U_0 + M, \quad U_0 = U_0 M_0 + UM,$$

les quatre *causes cardinales* de l'égalité donnée  $1 = M$  en forme des déterminations de  $U$  doivent être:

$$U = U_0, \quad U = U_0 M_0, \quad U = U_0 + M, \quad U = UM + U_0 M_0.$$

Nous pouvons construire toutes ces causes en ne connaissant ni la loi des causes, ni le nombre et les valeurs des éléments de l'égalité donnée. La première de ces causes présente la *détermination absurde* de  $U$ , la quatrième—sa détermination complète. Quant aux deux restantes causes cardinales, elles nous donnent les déterminations que nous pouvons laisser sans dénominations spéciales.

## XXV.

**La première méthode pour construire les causes principales—l'annexion des connaissances manquantes. Les causes de l'égalité  $a = ab$ .**

Soit donnée l'égalité ayant  $m$  éléments et  $n$  lettres  $1 = M$  pour laquelle nous devons trouver en forme des déterminations de  $U$  toutes ses causes principales par la méthode de l'annexion des connaissances manquantes. Pour cela il faut: 1°, construire l'égalité  $0 = M$  opposée à l'égalité donnée; 2°, réduire tous les  $2^{n-m}$  éléments de cette égalité opposée à la forme des déterminations de  $U$ ; 3°, composer d'après les règles de jonction des égalités toutes les  $2^{2^{n-m}}$  combinaisons de ces éléments; et enfin, 4°, combiner successivement d'après les mêmes règles toutes les combinaisons mentionnées avec l'égalité donnée réduite aussi à la forme  $U = UM + U_0 M_0$ .

*Exemple.* Trouver en forme des déterminations de  $a$  toutes les causes principales de l'égalité  $a = ab$ .

L'élément unique de cette égalité est  $ab_0=0$ . L'égalité opposée est en ce cas  $a=a_0+b_0$ ; ses éléments en nombre trois sont:

$$0=ab, 0=a_0b, 0=a_0b_0,$$

ou en forme désirée des déterminations de  $a$ :

$$a=ab_0, a=a+b, a=a+b_0.$$

Toutes les huit combinaisons possibles de ces éléments sont:

$$\begin{aligned} & a=a, a=ab_0, a=a+b, a=a+b_0, a=ab_0+a_0b, \\ & a=ab_0+a_0b_0=b_0, a=a+a_0(b+b_0)=1, a=ab_0+a_0(b+b_0)=a_0+b_0. \end{aligned}$$

En combinant chacune de ces huit égalités avec l'égalité donnée  $a=ab$ , nous recevons toutes les huit causes principales de cette égalité donnée, savoir:

- 1°,  $(a=ab, a=a)=(a=ab),$
- 2°,  $(a=ab, a=ab_0)=(a=0),$
- 3°,  $(a=ab, a=a+b)=(a=b),$
- 4°,  $(a=ab, a=a+b_0)=(a=ab+a_0b_0)=(b=1),$
- 5°,  $(a=ab, a=ab_0+a_0b)=(a=a_0b)=(a=0, b=0),$
- 6°,  $(a=ab, a=b_0)=(a=a_0b_0)=(a=0, b=1),$
- 7°,  $(a=ab, a=1)=(a=a_0+b)=(a=1, b=1),$
- 8°,  $(a=ab, a=a_0+b_0)=(a=a_0).$

Ces formules nous montrent que, si nous n'employerons que les deux simples termes donnés  $a$  et  $b$ , la subordination logique de  $a$  à  $b$  est possible: 1°, lorsque  $a=ab$ ; 2°, lorsque  $a=0$ ; 3°, lorsque  $a=b$ ;...; enfin, 8°, lorsque toutes les classes du discours sont égales à zéro.



## XXVI.

La seconde méthode pour le même but—utilisation des conséquences du problème opposé. Les causes de l'égalité  $a=a+b$ .

Nous savons déjà que nous pouvons trouver en forme des déterminations de  $U$  toutes les causes principales de l'égalité  $1=M$  à l'aide de la règle suivante: construire en forme des déterminations de  $U_0$  toutes les conséquences principales de l'égalité opposée  $0=M$  et changer  $U_0$  en  $U$  dans les membres gauches de toutes les égalités qui présentent ces conséquences.

*Exemple.* Trouver en forme des déterminations de  $a$  toutes les causes principales de l'égalité  $a=a+b$ .

L'égalité opposée est en ce cas:  $a=a_0b_0$ . Ses éléments en nombre trois sont:

$$0=ab, 0=ab_0, 0=a_0b_0,$$

ou en forme des déterminations de  $a_0$ :

$$a_0=a_0+b, a_0=a_0+b_0, a_0=a_0b.$$

Toutes les huit conséquences principales de cette égalité opposée sont:

$$a_0=a_0, a_0=a_0+b, a_0=a_0+b_0, a_0=a_0b, a_0=a_0+b+b_0=1, \\ a_0=b, a_0=a_0b+ab_0, a_0=a+b.$$

Donc toutes les huit causes principales de l'égalité donnée  $a=a+b$  seront:

$$1^0, a=a_0,$$

$$2^0, (a=a_0+b)=a=(1, b=1),$$

$$3^0, (a=a_0+b_0)=(a=1, b=0),$$

$$4^0, (a=a_0b)=(a=0, b=0),$$

$$5^{\circ}, a=1,$$

$$6^{\circ}, a=b,$$

$$7^{\circ}, (a=ab_0+a_0b)=(b=0),$$

$$8^{\circ}, a=a+b.$$

Donc la supériorité logique de  $a$  devant  $b$  est possible:

1<sup>o</sup>, lorsque toutes les classes du discours sont égales à zéro;

2<sup>o</sup>, lorsque  $a=1$ ;  $b=1$ ; 3<sup>o</sup>, lorsque  $a=1$ ,  $b=0$ ; etc.

## XXVII.

**La troisième méthode pour le même but—l'emploi de la formule (VI). Les causes de l'égalité  $a=a_0b$ .**

Dans les deux articles précédents sont exposées les deux méthodes indirectes pour construire les causes. Je ne donnerai encore que les trois méthodes directes pour le même but.

Trouvons pour l'égalité  $1=M$  toutes ses causes principales d'après la forme (VI) de la loi des causes, c'est à dire d'après la formule:

$$U = U_0M_0 + M\zeta,$$

où  $\zeta$  est une classe arbitraire. Si le problème donné a le nombre  $m$  des éléments et le nombre  $n$  des lettres, la fonction  $M$  doit avoir le nombre  $2^n - m$  des minimaux. Donc la fonction  $M\zeta$  qui représente toutes les subclasses identiques de  $M$  doit avoir le nombre  $2^{2^n - m}$  des valeurs différentes. Tel est le nombre total des différentes causes principales de l'égalité donnée. Pour calculer toutes ces causes effectivement, il faut ajouter consécutivement à la même fonction  $U_0M_0$  toutes les subclasses de la fonction  $M$ .

*Exemple.* Trouver toutes les causes principales pour l'égalité  $a=a_0b$  en forme des déterminations de  $a$ .

En ce cas nous avons:

$$M_0=ab+ab_0+a_0b, \quad M=a_0b_0, \quad U=a, \quad U_0M_0=a_0b.$$

La fonction  $M$  n'a que les deux subclasses: 0 et  $a_0b_0$ .  
Donc les deux causes principales du problème donné  $a=a_0b$  sont:

$$(a=a_0b+0=a_0b)=(a=0, b=0),$$

$$a=a_0b+a_0b_0=a_0.$$

Par conséquent l'égalité  $a=a_0b$  est possible: 1°, lorsque  $a$  et  $b$  sont égales à zéro et 2°, lorsque toutes les classes du discours sont égales à zéro.

### XXVIII.

La quatrième méthode pour le même but—l'emploi de la formule (VII). Les causes de l'égalité  $a=a_0+b$ .

La forme (VII) de la loi des causes est

$$U=(U_0+M)(M_0+\zeta),$$

où la somme  $M_0+\zeta$  désigne toutes les superclasses identiques de la fonction  $M_0$ . Pour appliquer cette formule à la recherche de toutes les causes principales de l'égalité  $1=M$  en forme des déterminations de  $U$ , il suffit de multiplier consécutivement la somme  $U_0+M$  par toutes les superclasses de  $M_0$ .

*Exemple.* Trouver toutes les causes principales de l'égalité  $a=a_0+b$  en forme des déterminations de  $a$ .

En ce cas nous avons:

$$M_0=ab_0+a_0b+a_0b_0, \quad M=ab, \quad U=a, \quad U_0+M=a_0+b.$$

Toutes les deux superclasses de  $M_0$  sont  $ab_0+a_0b+a_0b_0=a_0+b_0$  et 1. Donc toutes les deux causes principales de l'égalité donnée  $a=a_0+b$  seront:

$$a=(a_0+b) (a_0+b_0)=a_0,$$

$$[a=(a_0+b) 1=a_0+b]=(a=1, b=1).$$

Par conséquent l'égalité  $a=a_0+b$  n'est possible que dans les deux cas: 1°, lorsque toutes les classes du discours n'existent point et 2°, lorsque  $a=b=1$ .

# XXIX.

**La cinquième méthode pour le même but—l'emploi de la formule (V). Les causes de l'égalité  $0=ax+bx_0$ .**

Dans les articles XXV—XXVIII sont exposées les quatre méthodes différentes pour obtenir toutes les causes principales de l'égalité générale  $1=M$  en forme des déterminations de la fonction  $U$  prise arbitrairement. Du nombre des autres méthodes possibles pour le même but je puis indiquer ici, sans les développements ultérieurs, celles-ci par exemple: 1, trouver les causes à l'aide de la formule  $1=MY$  et les convertir en forme des déterminations de  $U$  et, 2°, trouver les causes à l'aide de la formule  $0=M_0+X$  et puis effectuer la même conversion.

Dans ce chapitre nous chercherons pour le problème  $1=M$  ayant  $m$  éléments et  $n$  lettres toutes ses  $2^{2^n-m}$  causes principales en forme des déterminations de  $U$  en usant la forme (V) de la loi des causes, c'est à dire la formule:

$$U = UM\xi + U_0(M_0 + \eta), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

ou, ce qui est la même chose, le système:

$$U = UM\xi, \quad U = U + M_0 + \eta. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Nous supposerons, comme partout précédemment, que les  $m$  éléments du problème se partagent dans les deux groupes: le groupe des  $m-s$  éléments de subordination de la fonction  $U$  et le groupe des  $s$  éléments de sa supériorité.

La formule (1) ne nous donnera que les causes principales, si nous traiterons les classes arbitraires  $\xi$  et  $\eta$  comme les fonctions des  $n$  lettres du problème seulement. Ainsi le nombre total des valeurs différentes de la chacune des fonctions  $\xi$  et  $\eta$  est égal à  $2^{2^n}$ . Mais le nombre des valeurs différentes

des fonctions  $UM\xi$  et  $U+M_0+\eta$  doit être sensiblement plus petit.

En supposant que le nombre des minimaux de la fonction  $U$  est  $i$ , démontrons que pour toutes les  $2^{\frac{n}{2}}$  valeurs de  $\xi$  la fonction  $UM\xi$  n'a que le nombre  $2^{i+s-m}$  des valeurs différentes et que pour toutes les  $2^{\frac{n}{2}}$  valeurs de  $\eta$  la fonction  $U+M_0+\eta$  a seulement le nombre  $2^{2-i-s}$  des valeurs différentes. Dans ce but nous démontrerons d'abord que l'égalité

$$UM\xi = UMA \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

a le nombre  $2^{2-i-s+m}$  des racines de  $\xi$  et l'égalité

$$U+M_0+\eta = U+M_0+B \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

a le nombre  $2^{i+s}$  des racines de  $\eta$ , où  $A$  et  $B$  sont quelques classes du discours prises à volonté. En effet, l'égalité (3) est équivalente à l'égalité:

$$0 = UMA_0\xi + UMA\xi_0,$$

ou encore à l'égalité:

$$\xi = \xi(U_0 + M_0 + A) + \xi_0 UMA = UMA + \xi(M_0 + MU_0), \quad . \quad (5)$$

et l'égalité (4) est équivalente à l'égalité:

$$0 = U_0 MB_0\eta + U_0 MB\eta_0,$$

ou encore à l'égalité:

$$\eta = \eta(U + M_0 + B) + \eta_0 U_0 MB = U_0 MB + \eta(M_0 + MU) \quad . \quad (6)$$

Nous savons que le nombre des différentes racines principales de la détermination intermédiaire (5) doit s'égaliser au nombre 2 élevé à la puissance égale au nombre des minimaux de la fonction  $M_0 + MU_0$ . Pareillement le nombre des racines différentes de  $\eta$  pour l'égalité (6) ou (4) doit s'égaliser au nombre 2 élevé à la puissance égale au nombre des minimaux de la

fonction  $M_0 + MU$ . Mais si le nombre des lettres du problème est  $n$ , le nombre de ses éléments est  $m$ , le nombre des éléments de supériorité de  $U$  est  $s$  et le nombre des minimaux de  $U$  est  $i$ , alors le nombre des minimaux est égal à :

$$\begin{array}{rcl}
 {}^n 2-i & \text{pour la fonction } U_0, & \\
 s & \text{'' '' '' } M_0 U_0, & \\
 {}^n 2-i-s & \text{'' '' '' } MU_0, & \\
 m-s & \text{'' '' '' } M_0 U, & \\
 i-m+s & \text{'' '' '' } UM, & \\
 {}^n 2-i-s+m & \text{'' '' '' } M_0 + MU_0, & \\
 i+s & \text{'' '' '' } M_0 + MU. &
 \end{array}$$

Par conséquent l'égalité (5) ou (3) a pour chaque valeur de  $A$  le nombre  $2^{n-2-i-s+m}$  des racines de  $\xi$  et l'égalité (6) ou (4) a pour chaque valeur de  $B$  le nombre  $2^{i+s}$  des racines de  $\eta$ , ce qu'il fallait démontrer.

S'il en est ainsi, l'égalité (3) doit diviser toutes les  $2^n$  classes du discours en  $2^{i+s-m}$  groupes chacune desquelles contient le nombre  $2^{n-2-i-s+m}$  des classes qui étant substituées successivement dans la première des égalités (2) au lieu de  $\xi$  ne nous donnent qu'une seule valeur de la fonction  $UM\xi$ . Pareillement l'égalité (4) divise toutes les  $2^n$  classes du discours en  $2^{n-2-i-s}$  groupes chacune desquelles contient le nombre  $2^{i+s}$  des classes qui étant substituées successivement dans la seconde des égalités (2) au lieu de  $\eta$  ne nous donnent qu'une seule valeur de la fonction  $U + M_0 + \eta$ . D'où nous concluons que la fonction  $UM\xi$  ne peut avoir que le nombre  $2^{i+s-m}$  des valeurs différentes et que le nombre des valeurs différentes de la fonction  $U + M_0 + \eta$  est  $2^{n-2-i-s}$ . Par conséquent le nombre total des différentes causes principales

que nous pouvons trouver pour l'égalité donnée  $1=M$  à l'aide de la formule générale (1) est  $2^{i+s-m} \times 2^{n-i-s} = 2^{n-m}$ .

Il ne nous reste à présent que de trouver un représentant pour chacune des groupes mentionnées de la première sorte et de la seconde. Pour cela il suffit de trouver:  $1^0$ , les  $2^{i+s-m}$  classes qui étant prises pour  $\xi$  nous donnent autant des valeurs différentes de la fonction  $UM\xi$  et,  $2^0$ , les  $2^{n-i-s}$  classes qui étant prises pour  $\eta$  nous donnent autant des valeurs différentes de la fonction  $U + M_0 + \eta$ .

Il est clair que le problème  $0=M$  opposé au problème donné  $1=M$  doit avoir le nombre  $2^{n-m}$  des éléments. Montrons que les  $i-m+s$  de ces éléments sont les éléments de subordination de la fonction  $U$  et les restants  $2^{n-i-s}$  sont les éléments de supériorité de cette fonction. Cela suit de ce que

$$(0=M) = (U=UM_0 + U_0M) = (U=UM_0, U=U + MU_0) = \\ = (0=UM, 0=U_0M).$$

Supposons à présent que le système des éléments du problème  $0=M$  est:

$$U=UP^{(1)}, U=UP^{(2)}, U=UP^{(3)}, \dots, U=UP^{(i-m+s)} \quad (7)$$

$$U=U+K^{(1)}, U=U+K^{(2)}, U=U+K^{(3)}, \dots, U=U+K^{(2^{n-i-s})} \quad (8)$$

où tous les  $P$  sont quelques des maximaux du discours et en même temps des unités logiques du problème  $0=M$ , tandis que tous les  $K$  sont quelques des minimaux du discours et des zéros logiques du même problème. Vu que le nombre total des combinaisons possibles des  $i-m+s$  éléments (7) à l'aide des multiplications est précisément  $2^{i-m+s}$  et le nombre total des combinaisons possibles des  $2^{n-i-s}$  éléments (8) à l'aide des additions est exactement  $2^{2^{n-i-s}}$ , il est naturel de supposer que les classes qui figurent en qualité des classes déterminantes.



dans les résultats des telles combinaisons sont les représentants mentionnés. Démontrons que cette supposition est juste.

Toutes les combinaisons (à l'aide des multiplications) des égalités (7) et toutes les combinaisons (à l'aide des additions) des égalités (8) nous donnent les déterminations dont les classes déterminantes corrélativement sont:

$$1; P^{(1)}, P^{(2)}, \dots, P^{(i-m+s)}; P^{(1)}P^{(2)}, P^{(1)}P^{(3)}, \dots, P^{(1)}P^{(2)} \dots P^{(i-m+s)} \dots (9)$$

$$0; K^{(1)}, K^{(2)}, \dots, K^{(2-i-s)}; K^{(1)} + K^{(2)}, K^{(1)} + K^{(3)}, \dots, \\ K^{(1)} + K^{(2)} + \dots + K^{(2-i-s)} \dots \dots \dots (10)$$

Il faut démontrer que les  $2^{i-m+s}$  classes (9) étant prises consécutivement pour  $\xi$  nous donnent les valeurs différentes de la fonction  $UM\xi$  et que les  $2^{2-i-s}$  classes (10) étant prises consécutivement pour  $\gamma$  nous donnent les valeurs différentes de la fonction  $U + M_0 + \gamma$ . Mais cela est ainsi, car, 1°, tous les  $P$  étant des superclasses identiques des fonctions  $M_0$  et  $U_0$ , la décomposition en maximaux du produit  $MU$  ne peut contenir aucun des maximaux  $P^{(1)}, P^{(2)}, \dots, P^{(i-m+s)}$  et, 2°, tous les  $K$  étant des subclasses identiques des fonctions  $M$  et  $U_0$ , la décomposition en minimaux de la somme  $U + M_0$  ne peut contenir aucun des minimaux  $K^{(1)}, K^{(2)}, \dots, K^{(2-i-s)}$ . Donc en multipliant  $UM$  par toutes les classes de la série (9) nous devons obtenir les  $2^{i-m+s}$  produits différents et en ajoutant à  $U + M_0$  toutes les classes de la série (10) nous devons recevoir les  $2^{2-i-s}$  sommes différentes. Cela démontre la proposition.

Ainsi, pour obtenir toutes les causes principales du problème donné  $1=M$  d'après la formule (1), il faut: construire les séries des éléments (7) et (8) pour le problème opposé  $0=M$ ; calculer toutes les classes des séries (9) et (10); multiplier par  $UM$  toutes les classes de la série (9) et par  $U_0$  toutes les classes de la série (10) ajoutées préalablement à la fonction

$M_0$ ; enfin ajouter consécutivement aux tous les produits de la première sorte tous les produits de la seconde.

*Exemple.* Trouvons en forme des déterminations de  $x$  toutes les causes principales pour „l'équation générale“ de  $M$ . Schröder  $0=ax+bx_0$ .

Le problème opposé est:  $0=a_0x+b_0x_0$ . Ses quatre éléments sont:

$$0=a_0bx, \quad 0=a_0b_0x, \quad 0=ab_0x_0, \quad 0=a_0b_0x_0,$$

ou en forme des déterminations de  $x$ :

$$x=x(a+b_0+x_0), \quad x=x(a+b+x_0), \quad x=x+x_0ab_0, \quad x=x+x_0a_0b_0.$$

Les séries (9) et (10) seront:

$$\begin{aligned} &1; \quad a+b_0+x_0, \quad a+b+x_0; \quad a+x_0, \\ &0; \quad x_0ab_0, \quad x_0a_0b_0; \quad x_0b_0. \end{aligned}$$

Les classes de la première de ces séries doivent être multipliées par la fonction  $UM=x(a_0x+b_0x_0)=a_0x$ . Quant aux classes de la seconde série nous devons les ajouter consécutivement à la fonction  $M_0=ax+bx_0$  et toutes ces sommes multiplier par la fonction  $U_0=x_0$ . Nous aurons:

$$\begin{aligned} &a_0x, \quad a_0b_0x, \quad a_0bx, \quad 0, \\ &bx_0, \quad x_0(a+b), \quad x_0(a_0+b), \quad x_0. \end{aligned}$$

Les additions successives nous donneront toutes les 16 causes principales du problème donné, savoir:

- 1°,  $[x=a_0x+bx_0]=(\text{le problème donné}),$
- 2°,  $[x=a_0x+x_0(a+b)]=(a=0, \quad x=x=b)=(a=0, \quad b=bx),$
- 3°,  $[x=a_0x+x_0(a_0+b)]=(ab=0, \quad x-a_0)=(x=a_0, \\ b=ba_0=bx),$
- 4°,  $[x=a_0x+x_0]=(x=1, \quad a=0),$
- 5°,  $[x=a_0b_0x+bx_0]=(b=0, \quad x=a_0x),$

- 6°,  $[x=a_0b_0x+x_0(a+b)]=(a=0, b=0),$   
 7°,  $[x=a_0b_0x+x_0(a_0+b)]=(b=0, x=a_0),$   
 8°,  $[x=a_0b_0x+x_0]=(x=1, a=0, b=0),$   
 9°,  $[x=a_0bx+bx_0]=(ab=0, x=a_0b)=(x=a_0b,$   
 $b=a_0b=x),$   
 10°,  $[x=a_0bx+x_0(a+b)]=(a=0, x=a_0b=b),$   
 11°,  $[x=a_0bx+x_0(a_0+b)]=(ab+a_0b_0=0, x=a_0b)=$   
 $=(a=b_0, x=b),$   
 12°,  $[x=a_0bx+x_0]=(x_0=0, a_0b=1)=(x=1, a=0,$   
 $b=1),$   
 13°,  $[x=0+bx_0]=(x=0, b=0),$   
 14°,  $[x=0+x_0(a+b)]=(x=0, a+b=0)=(x=a=b=0),$   
 15°,  $[x=0+x_0(a_0+b)]=(x=0, a=1, b=0),$   
 16°,  $[x=0+x_0]=(\text{l'absurdité logique}).$

### XXX.

**Sur les tables des causes principales. Exemple: l'égalité**  
 $a=b.$

Nous savons qu'en forme de déterminations de  $U$  toutes les causes principales de l'égalité  $1=M$  se déduisent des conséquences principales de l'égalité opposée  $0=M$  trouvées en forme des déterminations de  $U_0$  à l'aide du simple changement du symbole  $U_0$  par le symbole  $U$  dans les membres gauches des égalités qui présentent ces conséquences. Donc la table des conséquences de l'égalité opposée  $0=M$  est en même temps la table des causes de l'égalité donnée  $1=M$ . Par conséquent pour avoir la table des causes de l'égalité donnée  $1=M$ , il suffit de construire la table des conséquences de l'égalité opposée  $0=M$ . Alors, pour tirer de cette table toutes les causes de l'égalité  $1=M$  en forme des déterminations de  $U$ , il faut évaluer  $U$  consécutivement à toutes les classes de la table qui sont égales logiquement à  $U_0$  grâce à l'égalité opposée

$0=M$ , c'est à dire à la classe  $U_0$  et à toutes les classes qui se trouvent dans la même colonne de la table.

*Exemple.* Construire la table des causes principales pour l'égalité  $a=b$ .

L'égalité opposée est en ce cas  $a=b_0$ . Dans l'art. XIII est donnée la table des conséquences pour l'égalité  $a=b$ . A l'aide du changement de  $b$  en  $b_0$  et réciproquement nous pouvons convertir cette table dans la table désirée des conséquences de l'égalité  $a=b_0$ . Nous obtenons la table:

$a$	$a_0$	1	0
$b_0$	$b$	$a_0+b_0$	$ab$
$ab_0$	$a_0b$	$a+b$	$a_0b_0$
$a+b_0$	$a_0+b$	$ab_0+a_0b$	$ab+a_0b_0$

Voilà la table des causes de l'égalité  $a=b$ .

En forme des déterminations de  $a$  toutes les quatre causes principales de cette égalité seront:

$$a=a_0; a=b; (a=a_0b)=(a=0, b=0); [a=a_0+b]=(a=1, b=1).$$

En forme des déterminations de la classe  $a+b$  dont la négation est  $a_0b_0$  toutes les causes de la même égalité  $a=b$  sont:

$$a+b=a_0b_0, a+b=0, a+b=ab, a+b=ab+a_0b_0.$$

En forme des déterminations du zéro les mêmes causes sont:

$$0=1, 0=a_0+b_0, 0=a+b, 0=ab_0+a_0b.$$

### XXXI.

La table jointe des conséquences principales et des causes principales pour chaque égalité logique. La table jointe pour l'égalité  $a=b$ .

Nous avons appris de construire pour chaque égalité donnée  $1=M$  les deux tables différentes: la table de ses consé-

quences principales et la table de ses causes principales. Par exemple, pour l'égalité  $a=b$  ces deux tables sont:

la table des conséquences				la table des causes			
$a$	$a_0$	1	0	$a$	$a_0$	1	0
$b$	$b_0$	$a_0 + b$	$ab_0$	$b_0$	$b$	$a_0 + b_0$	$ab$
$ab$	$a_0 b_0$	$a + b_0$	$a_0 b$	$ab_0$	$a_0 b$	$a + b$	$a_0 b_0$
$a + b$	$a_0 + b_0$	$ab + a_0 b_0$	$ab_0 + a_0 b$	$a + b_0$	$a_0 + b$	$ab_0 + a_0 b$	$ab + a_0 b_0$

Dans la première de ces deux tables chaque colonne (verticale) contient les classes qui sont logiquement égales les unes aux autres grâce à l'égalité donnée  $a=b$ , tandis que dans la seconde table chaque colonne (verticale) embrasse toutes les classes qui sont logiquement égales l'une à l'autre grâce à l'égalité opposée  $a=b_0$ .

Pour réunir ces deux tables en une seule qui nous donnerait à la fois toutes les conséquences et toutes les causes de l'égalité  $a=b$ , il suffit d'exiger que toutes les classes égales à la classe donnée  $A$  grâce à l'égalité  $a=b$  soient placées dans une colonne verticale (ou horizontale) de la table, tandis que toutes les classes égales à la même  $A$  grâce à l'égalité opposée  $a=b_0$  soient placées dans une colonne horizontale (ou verticale).

En remplissant cette condition nous recevons au lieu de deux tables précédentes une seule qui est

la table jointe			
$a$	$b_0$	$ab_0$	$a + b_0$
$b$	$a_0$	$a_0 b$	$a_0 + b$
$ab$	$a_0 b_0$	0	$ab + a_0 b_0$
$a + b$	$a_0 + b_0$	$ab_0 + a_0 b$	1

Voilà la table jointe des conséquences et des causes de l'égalité  $a=b$ .

En forme des déterminations de la fonction  $a_0 + b$  (qui se trouve dans la quatrième colonne verticale) dont la négation est la fonction  $ab_0$  (qui se trouve dans la première colonne horizontale) cette table nous donne immédiatement:

les conséquences:  $a_0 + b = a + b_0$ ,  $a_0 + b = a_0 + b$ ,  $a_0 + b = ab + a_0 b_0$ ,  
 $a_0 + b = 1$ ;

les causes:  $a_0 + b = a$ ,  $a_0 + b = b_0$ ,  $a_0 + b = ab_0$ ,  $a_0 + b = a + b_0$ .

L'égalité  $a_0 + b = a + b_0$  qui se trouve à la fois parmi les conséquences et parmi les causes est évidemment l'une des formes de l'égalité donnée  $a = b$ .

La méthode ci-dessus pour le cas particulier de l'égalité  $a = b$  peut être appliquée au cas générale de l'égalité  $1 = M$  et nous recevons la règle suivante: pour construire la table jointe des conséquences et des causes de l'égalité  $1 = M$ , il suffit de réunir sa table des conséquences avec sa table des causes de telle manière que les classes égales grâce à l'égalité donnée  $1 = M$  soient disposées dans les colonnes verticales et les classes égales grâce à l'égalité opposée  $0 = M$  soient placées dans les colonnes horizontales.

Vu que l'emploi de cette règle est assez compliqué, je donnerai ici une autre règle très simple et commode.

Soit donnée l'égalité  $1 = M$  ayant  $n$  lettres et  $m$  éléments pour laquelle nous devons construire la table jointe des conséquences et des causes principales. Composons d'abord toutes les  $2^m$  subclasses identiques de la fonction  $M_0$  et les arrangeons régulièrement dans la première colonne verticale de la table à construire, c'est à dire en commençant du zéro et en finissant par la classe  $M_0$ . Ensuite placeons toutes les  $2^{2^n - m}$  subclasses identiques de la fonction  $M$  dans la première colonne horizontale de la table, en commençant aussi du zéro (qui coïncide avec le zéro précédent) et en finissant par la classe

*M.* Enfin il faut placer toutes les autres classes du discours dans la table en prenant pour guide la règle suivante: chaque classe *A* qui est évidemment égale à la somme  $AM_0 + AM$  doit être placée dans la table de telle manière qu'elle soit dans la même colonne horizontale avec la classe  $AM_0$  (qui se trouve nécessairement dans la première colonne verticale) et dans la même colonne verticale avec la classe  $AM$  (qui se trouve nécessairement dans la première colonne horizontale).

Evidemment, la table jointe pour l'égalité  $1=M$  est en même temps la table jointe pour l'égalité opposée  $0=M$ .

*Exemple.* Construisons encore une fois la table des conséquences et des causes pour l'égalité  $a=b$ .

En ce cas

$$M_0 = ab_0 + a_0b, \quad M = ab + a_0b_0.$$

Donc la première colonne verticale de la table désirée est composée des classes:

$$0, \quad ab_0, \quad a_0b, \quad ab_0 + a_0b$$

et la première colonne horizontale doit embrasser les classes:

$$0, \quad ab, \quad a_0b_0, \quad ab + a_0b_0.$$

Finalement nous recevons la table suivante:

0	$ab$	$a_0b_0$	$ab + a_0b_0$
$ab_0$	$a$	$b_0$	$a + b_0$
$a_0b$	$b$	$a_0$	$a_0 + b$
$ab_0 + a_0b$	$a + b$	$a_0 + b_0$	1

Cette table ne diffère de la table donnée plus haut que par la manière de disposition des colonnes verticales et horizontales.



# XXXII.

## Supplément à la théorie des racines: les racines de la détermination coéquivalente et de la détermination équivalente de la simple classe.

Dans l'art IX il est démontré que, 1°, pour chaque égalité donnée  $1 = M$  contenant la lettre  $a$  et réduite à la forme

$$0 = Ga + Ha_0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

ou, ce qui est la même chose, à la forme de la détermination *bipartible*:

$$a = aG_0 + a_0H \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

toutes les racines de la simple classe  $a$  se renferment dans la formule

$$a = G_0H + x(GH + G_0H_0); \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

que, 2°, le nombre total de racines principales de  $a$  est  $2^{i+k}$ , où  $i$  et  $k$  désignent les nombres des minimaux des fonctions  $G_0H_0$  et  $GH$  corrélativement; et que, 3°, toutes ces racines se partagent en  $2^i$  groupes chacune desquelles embrasse le nombre  $2^k$  des racines qui sont logiquement égales les unes aux autres grâce à l'égalité  $GH=0$  et par conséquent aussi grâce à l'égalité donnée (1) ou (2).

Nous avons vu aussi que si l'égalité donnée (1) vérifie identiquement la condition  $GH=0$ , en quelque cas l'une des fonctions  $G$  et  $H$  est la sous-classe identique de la négation de l'autre, ainsi que nous pouvons poser par exemple:

$$H = P; \quad G = P_0Q_0,$$

alors la détermination bipartible (2) se transforme dans la détermination *intermédiaire*:

$$a = a(P + Q) + a_0P = P + aQ;$$

l'égalité (1) prend la forme:

$$0 = aP_0Q_0 + a_0P;$$

la formule des racines (3) devient:

$$a = P + xP_0Q;$$

toutes les racines de  $a$  sont logiquement inégales et leur nombre total est  $2^i$ ,  $i$  étant le nombre des minimaux de la fonction  $G_0H_0$  qui se transforme dans ce cas dans la fonction  $P_0Q$ .

Pour compléter la théorie des racines, je discuterai ici encore deux cas particuliers.

1°. Le cas, où se vérifie identiquement la condition  $G_0H_0=0$ , ou, ce qui est la même chose, la condition  $G+H=1$ . Dans ce cas l'une des fonctions  $G$  et  $H$  est l'une des superclasses identiques de la négation de l'autre et nous pouvons poser par exemple:

$$G=R_0, H=R+S.$$

L'égalité (1) prenne la forme

$$0 = aR_0 + a_0(R+S);$$

la détermination bipartible (2) se transforme dans la détermination *coéquivalente*:

$$a = aR + a_0(R+S) = R + a_0S$$

et la formule des racines (3) devient:

$$a = R + xR_0S.$$

Dans ce cas toutes les racines de  $a$  sont logiquement égales l'une à l'autre et à la racine  $R$ . Le nombre total des racines est dans ce cas égal à  $2^k$ , où  $k$  désigne le nombre des minimaux de la fonction  $GH$  qui se transforme dans la fonction  $R_0S$ .

2°. Le cas, où se vérifient identiquement les deux conditions  $GH=0$ ,  $G_0H_0=0$ , ou, ce qui est la même chose, la condition  $G=H_0$ . Dans ce cas nous pouvons poser par exemple:

$$G=K, H=K_0.$$

L'égalité (1) prenne la forme

$$0=aK+a_0K_0; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

la détermination bipartible (2) se transforme dans la détermination *équivalente*:

$$a=aK_0+a_0K_0=K_0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

et la formule des racines (3) devient:  $a=K_0$ , c'est à dire coïncide avec l'égalité donnée (4) et sa forme (5). Dans ce cas l'égalité donnée n'a qu'une seule racine qui coïncide avec la classe qui détermine  $a$  complètement de cette égalité.

*Exemple 1.* Trouver toutes les racines principales de  $a$  pour l'égalité:

$$0=ab_0+a_0(b+c+d).$$

Dans ce cas nous avons:

$$G=b_0, H=b+c+d.$$

Donc la condition  $G+H=1$  se vérifie identiquement. L'égalité donnée se transforme dans la détermination *coéquivalente* de  $a$  qui est:

$$a=ab+a_0(b+c+d)=b+a_0(c+d)=b+a_0b_0(c+d).$$

Vu que la fonction  $b_0(c+d)$  n'a que les trois minimaux (du discours des lettres  $b, c, d$ ), l'égalité donnée doit avoir le nombre  $2^3=8$  des racines de  $a$  et toutes ces racines doivent être égales logiquement les unes aux autres. Ces racines évidemment sont:

$$b; b+b_0cd; b+b_0cd_0; b+b_0c_0d; b+b_0c; \\ b+b_0d; b+b_0(cd_0+c_0d); b+b_0(c+d).$$

*Exemple 2.* Trouver toutes les racines principales de  $b$  pour le problème de Venn qui est

$$a=a(bc_0+b_0c), b=ab,$$

ou, ce qui est la même chose:

$$0=a(bc+b_0c_0)+a_0b,$$

ou encore:

$$0=b(ac+a_0)+b_0ac_0=b(a_0+c)+b_0ac_0.$$

Ici les coefficients de  $b$  et de  $b_0$  sont les négations mutuelles. Le problème donné se transforme dans la détermination équivalente  $b=ac_0$  qui nous donne immédiatement la racine unique de  $b$  pour le problème de Venn.

### XXXIII.

**Démontrer que les racines sont généralement différentes de conséquences et de causes. Les trois sortes des déterminations des classes simples.**

Prenons le problème général  $1=M$  qui après le développement prend la forme:

$$0=aG+a_0H \dots \dots \dots (1)$$

et comparons le relativement au volume de contenu logique avec la formule générale des racines de  $a$  pour cette égalité, c'est à dire avec la formule:

$$a=G_0H+x(GH+G_0H_0) \dots \dots \dots (2)$$

Dans ce but nous représentons l'égalité donnée (1) ainsi:

$$0=GH+aGH_0+a_0G_0H \dots \dots \dots (3)$$

et la formule des racines (2), à l'aide de la règle générale.

$$(A=B)=(0=AB_0+A_0B),$$

ainsi:

$$\begin{aligned} 0 &= a_0'(G+H_0)(x_0+GH_0+G_0H) + a_0'(G_0H+x(GH+G_0H_0)) = \\ &= a[x_0(G+H_0)+GH_0] + a_0(G_0H+xGH+xG_0H_0) = \\ &= a(GH_0+x_0GH+x_0G_0H_0) + a_0(G_0H+xGH+xG_0H_0) = \\ &= aGH_0+a_0G_0H+GH(ax_0+a_0x)+G_0H_0(ax_0+a_0x) \quad (4) \end{aligned}$$

La comparaison des formules (4) et (3) nous montre que, 1<sup>o</sup>, l'égalité donnée (1) ou (3) possède les connaissances:

$$0=GH(ax+a_0x_0) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

qui n'entrent point dans la formule des racines (2) ou (4), et que, 2<sup>o</sup>, la formule des racines (2) ou (4) embrasse les connaissances:

$$0=G_0H_0(ax_0+a_0x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

qui n'entrent point dans l'égalité donnée (1) ou (3).

Vu que, 1<sup>o</sup>, toutes les conséquences de chaque égalité n'embrassent qu'une partie quelconque de l'ensemble de ses connaissances et que, 2<sup>o</sup>, toutes les causes de chaque égalité embrassent toutes ses connaissances avec quelque excès, nous pouvons dire à présent que les racines des égalités logiques n'appartiennent pas généralement ni au nombre de ses conséquences, ni au nombre de ses causes.

Voilà pourquoi nous devons choisir une dénomination quelconque pour les déterminations présentées par les racines. Je propose les nommer *les déterminations racinales*. Ainsi pour chaque classe simple  $a$  nous pouvons déduire de chaque égalité contenant la lettre  $a$  les trois sortes des déterminations:

1<sup>o</sup>, les déterminations partielles ou les conséquences,

2<sup>o</sup>, les déterminations excessives ou les causes

et 3°, les déterminations racinales qui ne sont pas généralement ni les conséquences, ni les causes \*).

*Exemple.* Pour l'égalité de *M.* Schröder:

$$0 = ax + bx_0$$

les quatre racines principales de la simple classe *x* qui sont:

$$x = a_0 b, \quad x = a_0, \quad x = b, \quad x = a_0 + b$$

ne se trouvent point ni parmi les conséquences principales données dans l'article XVIII, ni parmi les causes principales données dans le chapitre XXIX.

#### XXXIV.

Les cas spéciaux où toutes les racines sont ou les causes, ou les conséquences, ou les causes et les conséquences à la fois.

Nous discuterons ces trois cas séparément.

1°. Si l'égalité donnée  $1 = M$ , étant développée relativement à l'une de ses lettres *a*, nous donne l'égalité  $Ga + Ha_0 = 0$  qui satisfait identiquement à la condition  $GH = 0$ , en quel cas nous recevons pour *a* la détermination intermédiaire, alors de la comparaison des formules (3) et (4) du chapitre précédent nous concluons que la formule des racines embrasse en ce cas pour toutes les valeurs de *x* toutes les connaissances de l'égalité donnée avec quelque excès. Cela désigne qu'en ce cas toutes les racines de *a*, étant logiquement inégales, appartiennent au nombre des causes de l'égalité donnée. Donc pour cette lettre et cette égalité toutes les déterminations racinales sont en même temps excessives.

---

\*) Dans le chapitre VII j'ai donné la classification *formelle* des déterminations; ici nous avons la classification *matérielle*.

2°. Si l'égalité donnée vérifie identiquement la condition  $G+H=1$ , en quel cas nous recevons pour  $a$  la détermination coéquivaleute, alors nous voyons de la comparaison des mêmes formules (3) et (4) qu'en ce cas la formule des racines n'embrace qu'une partie des connaissances de l'égalité donnée. Dans ce cas toutes les racines de  $a$ , étant logiquement égales les unes aux autres, appartiennent au nombre des conséquences de l'égalité donnée. Donc pour cette lettre et cette égalité toutes les déterminations racinales sont en même temps particulières.

Enfin, 3°, si l'égalité donnée vérifie identiquement les deux conditions  $GH=0$ ,  $G+H=1$ , en quel cas nous recevons pour  $a$  la détermination équivalente, les deux formules (3) et (4) coïncident l'une avec l'autre totalement et la formule de la racine unique de  $a$ , n'étant qu'une des formes de l'égalité donnée, est à la fois la cause et la conséquence de cette égalité.

Il est aisé à voir que les trois cas ci-discutées sont les cas, où les coefficients de  $a$  et de  $a_0$  dans l'égalité donnée  $Ga+Ha_0=0$  sont disjonctifs corrélativement dans l'un de deux sens de ce mot, dans l'autre et dans tous les deux à la fois.

### XXXV.

**Le sommaire des lois proposées dans cet ouvrage. Que faut-il préférer: les égalités logiques ou les subsumtions?**

Pour ne pas augmenter sans besoin le volume de ce traité, je laisse sans publication quelques propositions secondaires qui me sont connues et je me hâte de dire quelques mots conclusifs.

Voici le sommaire des sept lois démontrées dans ce travail et qui se rapportent spécialement aux égalités logiques:



1<sup>o</sup>, la loi des formes (ou de l'équivalence, ou encore des déterminations complètes),

2<sup>o</sup>, la loi de jonction,

3<sup>o</sup>, la loi de décomposition,

4<sup>o</sup>, la loi des racines (ou des déterminations racinales),

5<sup>o</sup>, la loi de l'élimination (des lettres),

6<sup>o</sup>, la loi des conséquences (ou des déterminations partielles),

et 7<sup>o</sup>, la loi des causes (ou des déterminations excessives).

La première de ces lois est le fondement de toutes les autres. Cette loi nous permet de construire toutes les formes de chaque égalité séparée et de juger—si les deux égalités données sont équivalentes ou non. La seconde loi est la généralisation de la première, parce qu'elle indique pour chaque système donné toutes les égalités séparées équivalentes à ce système. La troisième loi est en propre inverse aux deux premières, mais elle présente aussi la condition de la généralisation ultérieure, parce qu'elle nous permet de trouver pour chaque système donné tous ses éléments et, à l'aide des jonctions, tous les systèmes équivalents à lui. Donc nous pouvons considérer l'ensemble de toutes les trois lois précédentes comme une seule loi que nous pouvons nommer la loi de l'équivalence des systèmes aux systèmes.

La même loi première, considérée comme la loi des déterminations complètes, peut être généralisée encore dans deux directions différentes qui nous conduisent à la loi des conséquences (ou des déterminations partielles), d'un côté, et à la loi des causes (ou des déterminations excessives), de l'autre. La loi cinquième (de l'élimination) n'est qu'un des cas particuliers de la loi des conséquences. Enfin, la loi des racines est une loi intermédiaire entre la loi des conséquences et la loi des causes.

J'espère que l'ensemble des sept lois formulées et démontrées dans ce mémoire doit élever la théorie des égalités logiques à la hauteur inadmissible à toujours pour la théorie des subsumtions (des inégalités logiques) qui domine en ce moment dans la science nouvelle et jeune que nous nommons la Logique Mathématique. La tendance d'approprier les formules scientifiques aux retours du langage familier, la tendance qui a forcé de préférer la formule vague et inexacte  $a < b$  à la formule rigoureuse et exacte  $a = ab$ , doit être abandonnée totalement comme nuisible pour la science et adverse à son esprit même. Il n'est pas permis, sans pertes pour la science, d'oublier la vérité évidente qui nous dit que l'égalité a été toujours et doit être toujours plus préférable que toutes les inégalités possibles.

A la fin des fins je dois dire que la découverte des sept lois mentionnées ne me serait point possible sans l'invention préalable de la *détermination bipartible*, c'est à dire de l'égalité simple:

$$A = AB + A_0C$$

qui est équivalente au système des deux subsumtions:

$$A < B, A > C$$

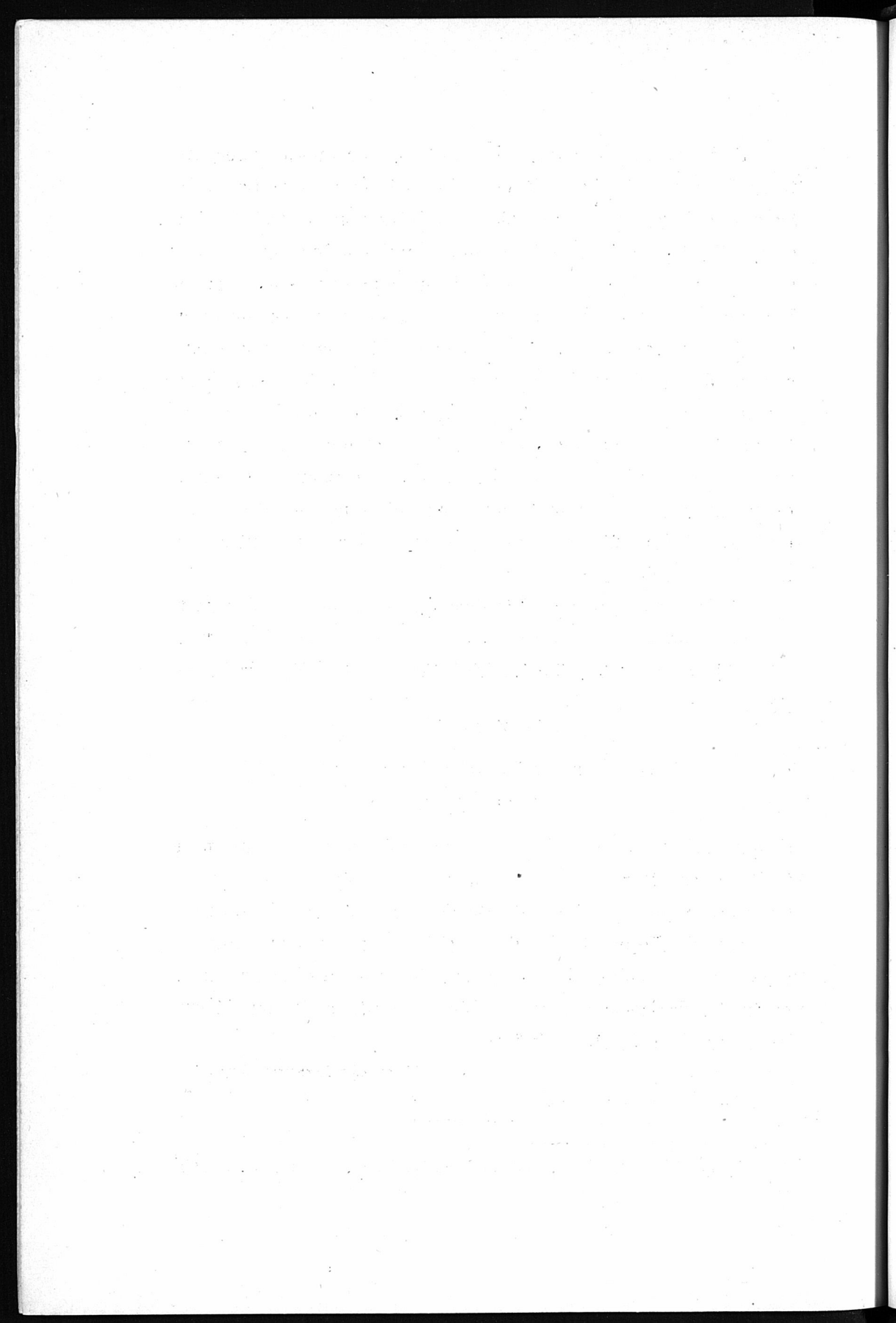
et qui était trouvée et publiée par moi en 1884 dans mon traité russe „Sur les moyens de résoudre les égalités logiques“. Grâce à la participation éclairée de la Société Physico-mathématique de Kasan et de son président professeur Vassilief auxquels je témoigne ici ma reconnaissance la plus profonde, ce traité, de même que le mémoire présent, a été publié sur les pages de son „Bulletin“ \*).

Juin 1898.  
Gorodnia,  
Gouvernement de Tchernigof,  
Russie.

**Platon Poretsky.**

---

\*) Voyez le „Bulletin“ de la Société mentionnée, première série, t. 2, 1884.



## Table des matières.

Chapitres.	Pages.
I. La loi de l'équivalence (ou des formes) des égalités logiques . .	1.
II. La loi de jonction des égalités logiques . . . . .	10.
III. La loi de décomposition des égalités logiques en ses éléments .	16.
IV. Sur le nombre des éléments des égalités logiques. . . . .	23.
V. Sur le nombre des problèmes logiques exprimés par les égalités; le sommaire de tous les problèmes de deux lettres . . . . .	28.
VI. La méthode générale pour construire les problèmes logiques à l'aide des égalités . . . . .	29,
VII. Essai de la classification des déterminations . . . . .	31.
VIII. Sur les racines d'une détermination intermédiaire de la simple classe . . . . .	33.
IX. La loi des racines des égalités logiques . . . . .	46.
X. Encore une fois sur le nombre des éléments des égalités logiques.	58.
XI. La loi de l'élimination des lettres (ou des termes simples) dans les égalités logiques . . . . .	59.
XII. La loi des conséquences des égalités logiques . . . . .	72.
XIII. Sur le nombre des conséquences différentes. Démonstration d'un théorème général. La table des conséquences pour l'égalité $a=b$ . . . .	82.
XIV. Sur les quatre conséquences cardinales . . . . .	86.
XV. Encore une forme de la loi des conséquences et quelques mots à cette occasion . . . . .	90.
XVI. La première méthode pour construire toutes les conséquences de l'égalité donnée—l'élimination des connaissances. Les conséquences du prob- lème $a=b$ . . . . .	92.
XVII. La seconde méthode pour le même but—les combinaisons des con- naissances élémentaires. Les conséquences des prémisses du syllogisme Barbara . . . . .	98.
XVIII. La troisième méthode pour le même but—les complications de la détermination compacte à l'aide des zéros logiques. Les conséquences de l'égalité $0=ax+bx_0$ . . . . .	101.

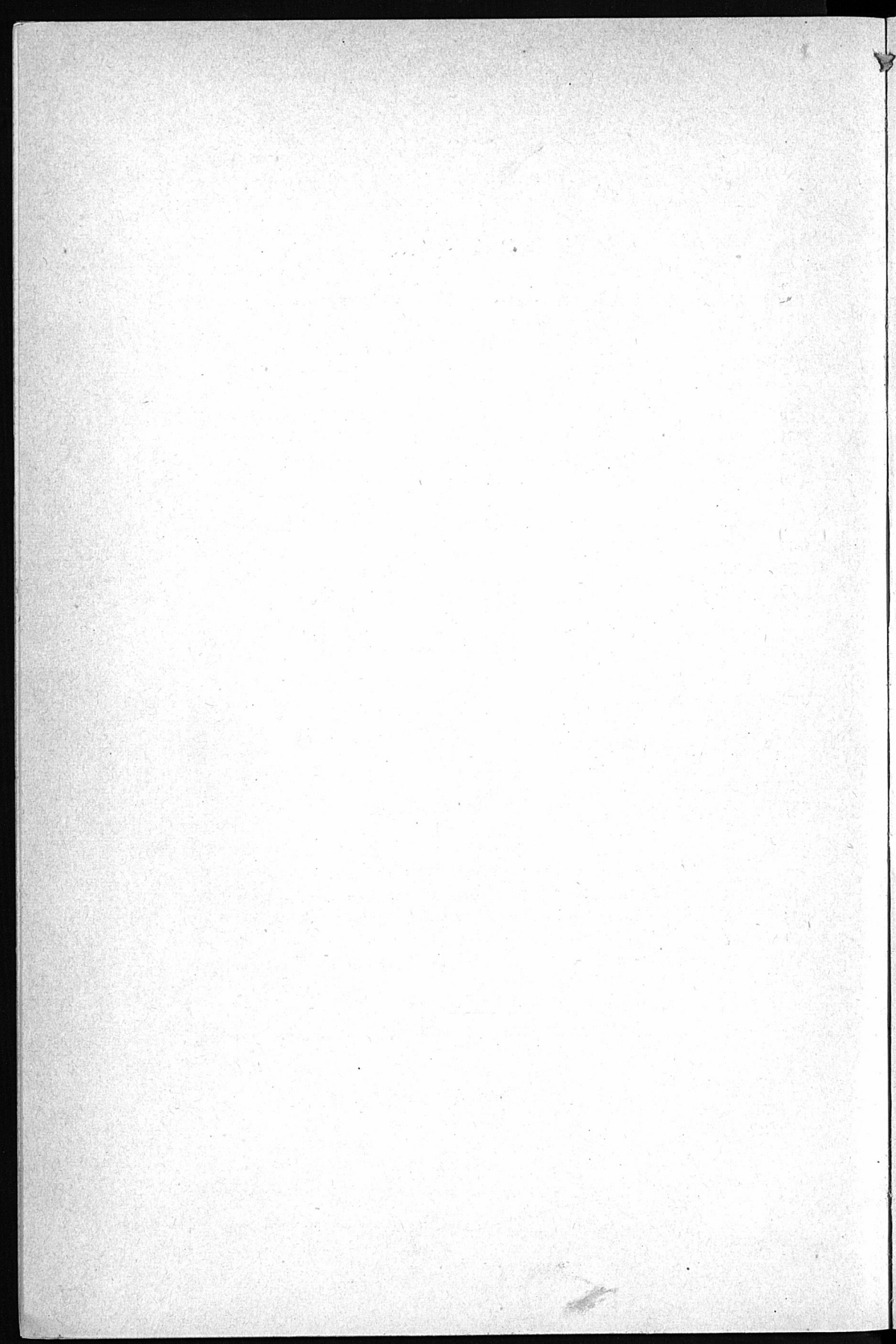
## Chapitres.

Pages.

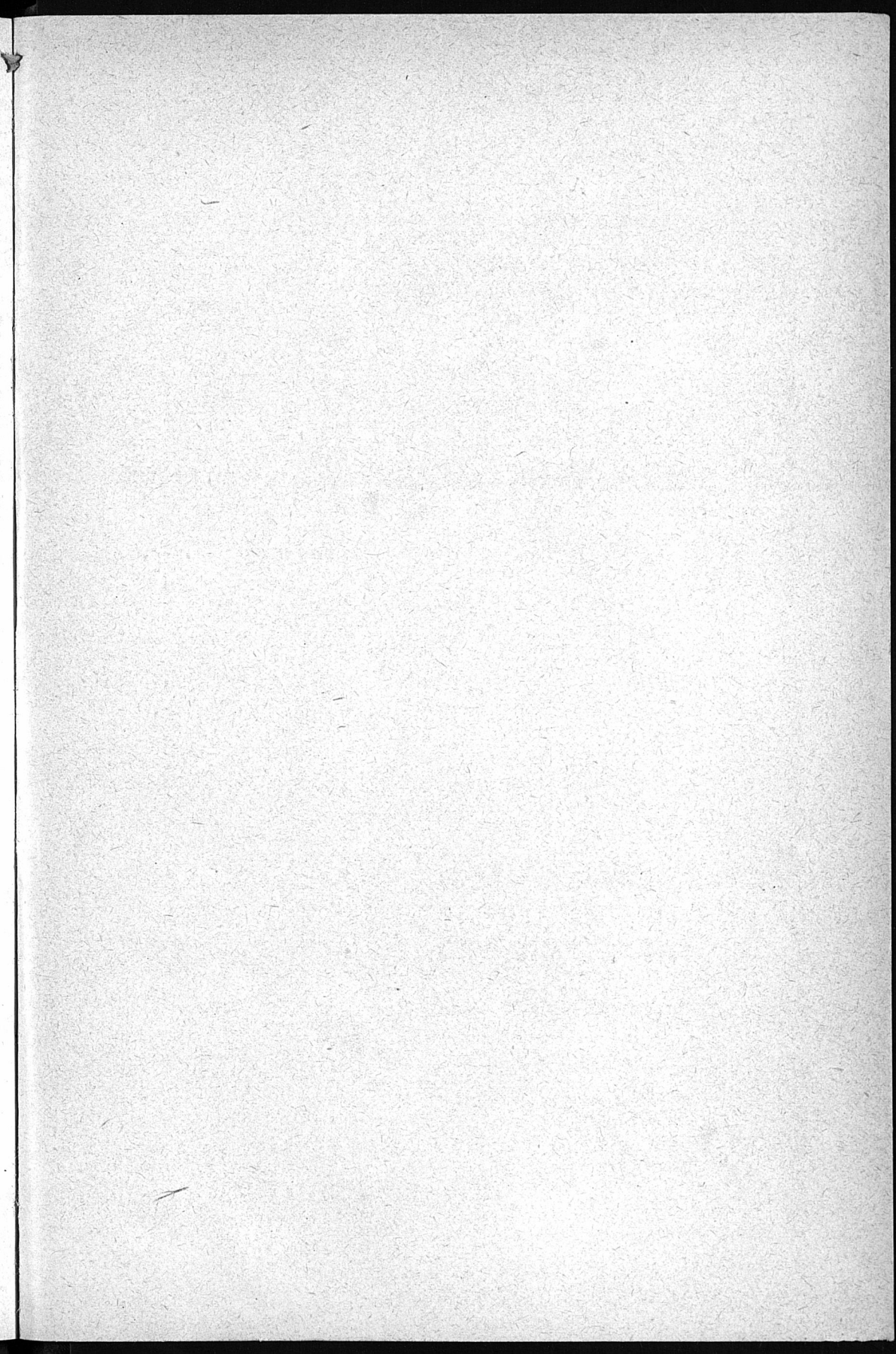
XIX. La quatrième méthode pour le même but—les complications de la détermination détaillée à l'aide des unités logiques. Les conséquences de l'égalité $b=ac_0$ .	104.
XX. La cinquième méthode pour le même but—l'emploi de la formule générale $U=U(M+\xi)+U_0M_0\eta$ . La loi des conséquences principales. Les conséquences de l'égalité $a=b+c$ .	107.
XXI. Les résultats de l'élimination des lettres traités comme les conséquences principales. Exemple: égalité $a=bc$ .	115.
XXII. La méthode simple et générale pour construire la table des conséquences principales pour chaque problème exprimé à l'aide des égalités. Les tables pour les égalités: $a=ab$ , $a=ab+a_0b_0$ et $a=a_0b$ .	120.
XXIII. La loi des causes des égalités logiques.	124.
XXIV. Sur le nombre des causes différentes. Sur les problèmes opposés. La liaison entre les causes du problème donné et les conséquences du problème opposé. Sur les causes cardinales.	130.
XXV. La première méthode pour construire les causes principales—l'annexion des connaissances manquantes. Les causes de l'égalité $a=ab$ .	138.
XXVII. La seconde méthode pour le même but—utilisation des conséquences du problème opposé. Les causes de l'égalité $a=a+b$ .	135.
XXVII. La troisième méthode pour le même but—l'emploi de la formule (VI). Les causes de l'égalité $a=a_0b$ .	136.
XXVIII. La quatrième méthode pour le même but—l'emploi de la formule (VII). Les causes de l'égalité $a=a_0+b$ .	137.
XXIX. La cinquième méthode pour le même but—l'emploi de la formule (V). Les causes de l'égalité $0=ax+bx_0$ .	138.
XXX. Sur les tables des causes principales. Exemple: l'égalité $a=b$ .	144.
XXXI. La table jointe des conséquences principales et des causes principales pour chaque égalité logique. La table jointe pour l'égalité $a=b$ .	145.
XXXII. Supplément à la théorie des racines: les racines de la détermination coéquivalente et de la détermination équivalente de la simple classe.	149.
XXXIII. Démontrer que les racines sont généralement différentes de conséquences et de causes. Les trois sortes des déterminations des classes simples.	152.
XXXIV. Les cas spéciaux où toutes les racines sont ou les causes, ou les conséquences, ou les causes et les conséquences, à la fois.	154.
XXXV. Le sommaire des lois proposées dans cet ouvrage. Que faut-il préférer: les égalités logiques ou les subsumtions?	155.

# E R R A T A.

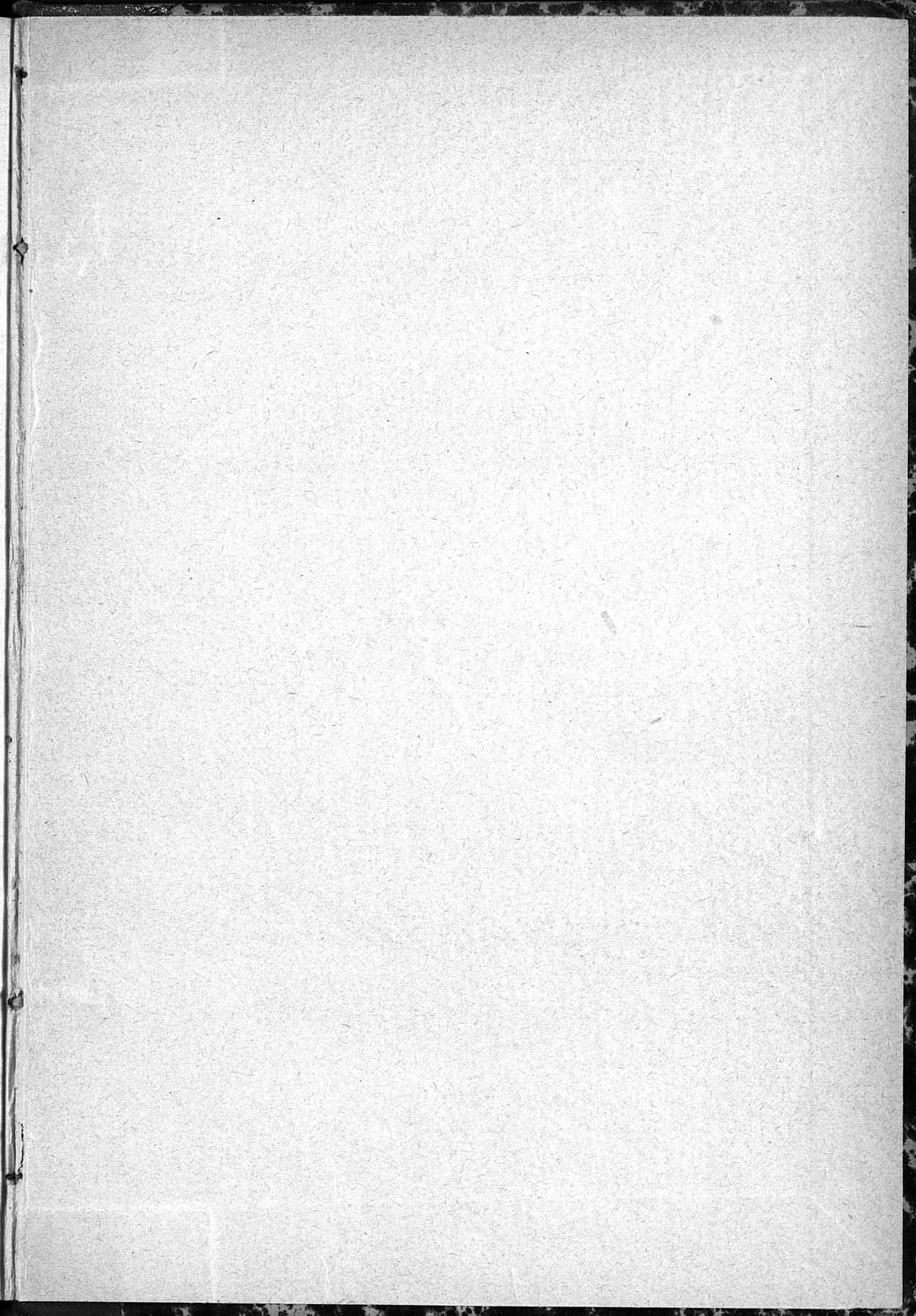
Pages	Lignes	Au lieu de:	Lire:
2	16	désigner	désignerons
3	23	$U_0 N_0 +$	$U_0 N_0) +$
7	4	$(A=B)[A$	$(A=B)=[A$
7	11	$(a_0+c)a$	$(a_0+c)[a$
20	9	$A'_0(C'$	$A_0(C'$
31	6	$b_0 N''$	$b_0 N'$
34	24	$(P+Q)Q+$	$(P+Q)Q=$
50	7	$GH_0$	$G_0 H_0$
59	6	$(bc_0+d_0)$	$b(c_0+d_0)$
59	15	$0=ab_0c_0d, 0=ab_0c_0d$	$0=ab_0c_0d, 0=ab_0cd$
66	16	(6)	(9)
71	27	le	la
75	10	$CA_0+C_0)$	$(A_0+C_0)$
75	11	$=BC_0D$	$+BC_0D$
79	16	$A+A+CY$	$A=A+CY$
79	16	$B(B+X)$	$A(B+X)$
88	11	nous peuvent	peuvent
102	4	$x.x.$	$x.$
112	31	$+ =$	$+$
115	19	traitées	traités
121	20	$M$	$U$
121	21	à $M$	à $U$
127	13-28	$U$	$Y$
128	23-24	$U$	$Y$
129	6	$U+_0$	$+ U_0$
135	26	$a=(1$	$(a=1$
143	24	$x=x=b$	$x=x+b$
143	25	$x-\alpha_0$	$x=\alpha_0$
149	17	$2s$	$2i$
II	18	138	133















CANTOR

VALLATI

PORETSKY

L. 5630